TROPHEES KANGOUROU 2022 **Corrigés**

Épreuve Benjamins

1- rép E

Les sommes de deux nombres successifs se suivent avec les parités suivantes (P = pair ; I = impair) :
P I est suivi de P ; I P est suivi de P ; P P est suivi de I ; I I est suivi de I.
D'où la succession des parités des termes de la suite : P I P P I P P I P…, soit une périodicité de trois termes avec un impair au centre. Il y a donc 33 termes impairs dans les 100 premiers termes.

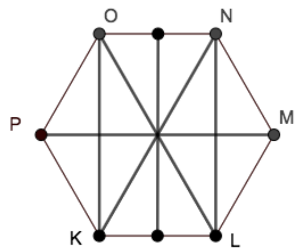
2- rép D

On compte 26 segments de droite de longueur 1, et aussi 7 demi-cercles et 4 quarts de cercles, soit 9 demi-cercles. Un demi-cercle de rayon 1, a pour longueur π. La longueur de la ligne est donc 26 + (9 × π).

3- rép D

Il y a 13 consonnes, 12 voyelles et 2 espaces.
2 x 0,33+12 x 0,39 + 13 x 0,48 = 0,66 + 4,68 + 6,24 =11,58
On peut aussi remarquer que la réponse (en centièmes de secondes) doit être un multiple de 3, et que 1158 (11,58 s) est la seule réponse dans ce cas.

4- rép B



Chaque rectangle peut être découpé en 4 parties triangulaires identiques aux autres régions triangulaires.
aire d'1 triangle + aire d'1 rectangle = aire de 5 triangles.
L'aire d'1 triangle est donc 20÷5 = 4 cm^2. Et l'hexagone qui contient 12 triangles a une aire de 48 cm^2.

5- rép B

C ne peut pas être 0. Or C+X donnant X au résultat, c'est que C vaut 9 et qu'il y a une retenue venant des unités. V vaut donc au moins 5.
La colonne des centaines nous informe alors que X vaut 4 (puisque X + X + 1 = 9) ; la colonne des unités indique que V vaut alors 7. L'addition donnée est 497 + 447 = 944 et la somme des chiffres X, C, V est 4 + 9 + 7 = 20.

6- rép D

La première bougie brûle, avant que la suivante ne soit allumée, pendant les 9/10 de son temps d'allumage. 2min = 120s et 9/10 de120s = 9 × 12 = 108 s
9 bougies brulent ainsi pendant 108 secondes, la dixième bougie s'allume alors et brûle durant 120 secondes. Le temps total d'éclairage est donc : (9 × 108) + 120 = 1092 s = 18 min 12s.

7- rép B

La somme des nombres entiers jusqu'à 20 vaut 210. Il faut donc lui retirer un total de 110 pour que le résultat soit 100. Quand on change un signe + en –, on diminue le résultat du double du nombre concerné. Il faut donc choisir dans cette somme 3 nombres dont la somme est 55 et changer le signe qui les précède. Avec des nombres inférieurs ou égaux à 20, ces nombres peuvent être (20,19,16) ou (20,18,17), soit deux façons de s'y prendre.

8 - rép E

Chacun des 8 "cubes coins" du cube $2 \times 2 \times 2$ comporte forcément, à l'extérieur, les 3 symboles disque, croix, étoile, car sinon il y aurait deux carrés avec un côté commun et portant le même symbole. Le cube ne comporte que ces 8 cubes coins. Par conséquent les faces extérieures du cube portent 8 disques, 8 croix, 8 étoiles. Réponse qui n'est pas proposée.

9- rép B

cba est multiple de 8, mais aussi de 3, ayant la même somme des chiffres que *bac.* Il est donc multiple de 24. Comme *abc* est multiple de 5, et *c*≠0, *c* = 5. Les multiples de 24 à 3 chiffres commençant par 5 sont :
24 x 21 = 504, 24 x 22 = 528, 24 x 23 = 552, 24 x 24 = 576
Mais b n'est pas nul et les chiffres sont distincts ; il y a donc deux possibilités : 528 et 576.

Épreuve Cadets

1 - rép E
Si a est le chiffre placé dans chaque carré, la somme obtenue est :
$a \times (1+11+111+1111) = 1234\,a$.
Le résultat sera donc toujours multiple de 1234 et comme $1234 = 2 \times 617$, il sera aussi multiple de 617.

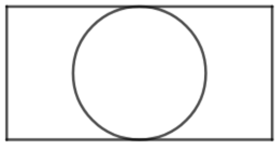
2 - rép C
Si a, b, c sont les longueurs des trois arêtes du pavé droit, les aires de chaque face sont ab, bc, ca et le volume du pavé est abc. Le produit des 3 aires est donc $a^2b^2c^2$, soit le carré du volume :

$$30\times70\times84 = 3\times10\times7\times10\times(3\times4\times7)$$

$$30\times70\times84 = 3^2\times10^2\times7^2\times2^2 = (3\times10\times7\times2)^2$$

Le volume en cm^3 vaut donc $3\times10\times7\times2 = 420$.

3- rép B
Le rayon du cercle est $y/2$. L'aire du disque est $\pi y^2/4$. L'aire du rectangle est xy, qui vaut le double de l'aire du disque :
$xy = \pi y^2/2$ ou, en divisant les deux membres par y^2, $x/y = \pi/2$.

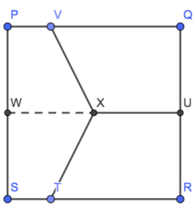


4 - rép D
soit a, b, c et d les 4 nombres dans l'ordre

2	*a*	0	*b*	2	*c*	2	*d*

(1) $d = b + c + 4$
(2) $2 = b + c + 2$ donc $b + c = 0$ et $d = 4$
(3) $c = a + b + 2$
(4) $2 = a + b + 2$ donc $a + b = 0$ et $c = 2$
Avec (2) on trouve $b = -2$ et donc, $a = 2$, ce qui donne $abcd = -32 = -2^5$.

5 - rép C



Soit x = PV
VQ = $2 - x$
aire du trapèze VQUX =($(2-x) + 1$) / 2= $(3-x)$ / 2
aire du trapèze PVXW =($x + 1$) / 2
On veut que 2 aire PVXW = aire VQUX,
soit $x+1 = (3-x)/2$ ou $2x + 2 = 3 - x$ et $x = 1/3$.

6 - rép C
Dans le tableau des sommes traduisant les 36 événements possibles, il y a 15 nombres premiers (en gris dans le tableau) et 7 carrés (en noir dans le tableau).
Donc $p = 15/36$; $q = 7/36$ donc $p + q = 22/36 = 11/18$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

7- rép B
Dans le calcul d'Alice, chaque terme comporte aussi son opposé (par exemple 18 fournit le terme 1 – 8 et 81 fournit le terme 8 — 1, qui s'annulent l'un l'autre), sauf pour les multiples de 10 10, 20, 30 ,…,90
Le calcul d'Alice se réduit donc à 1 + 2 + 3 +…+ 8 + 9 = 45.

8- rép C
Les diagonales des 2 carrés sont parallèles, faisant toutes deux un angle de 45° avec les côtés. D'où (DP)//(RE). DPER est un trapèze. Les triangles DPR et RPE ont la même hauteur (la hauteur du trapèze) et leurs aires sont dans le même rapport que leurs bases, qui ne sont autres que les demi-diagonales des carrés : aire DPR/aire RPE = 7/12.
Par ailleurs : aire RPE = aire BRE (même côté RE, même hauteur relative à ce côté) = (6x6) / 2 = 18 cm^2.

aire DPR = (18 x 7)/12 = 21/2 = 10,5.
D'où aire RPE – aire DPR = 18 – 10,5 = 7,5 cm^2.

9 - rép E
Observons la suite des entiers ne comportant que des multiples de 5 ou 11:
5 ; 10; 11; 15 ; 20, 22; 25 ; 30 ; 33 ; 35 ; 40 ; 44…
Il y a dix entiers entre deux multiples successifs de 11. On trouve donc deux multiples de 5 entre chaque couple de multiples de 11 consécutifs.
Quand on écrit dans l'ordre tous les entiers, chaque bloc de 11 entiers, comporte donc donc 3 entiers à effacer : deux multiples de 5 et un multiple de 11 - qui peut éventuellement être multiple à la fois de 5 et de 11. Il y a donc 8 entiers restants dans chaque bloc de 11.
2022 = 252 x 8 + 6.
Le 2022ème nombre non effacé sera donc le 6ème entier suivant le 252ème multiple de 11.
252 x 11 = 2772. Le 6ème nombre non effacé après 2772 est 2779 (2775 étant effacé).

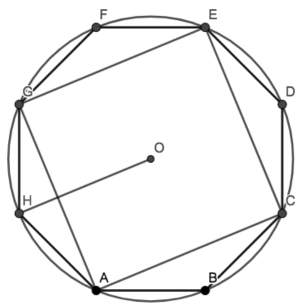
Épreuve Lycées

1- rép A

En effectuant chaque parenthèse, on trouve : $X=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times......\times\frac{2022}{2021}\times\frac{2023}{2022}$ et, après simplification généralisée $X=\frac{2023}{2}=1011{,}5$.

2 - rép D
Adam a formé 48. En effet, 10 *a*+*b* est multiple de *a* si et seulement si *b* est multiple de *a* donc *b* > *a* *(strictement* puisque *a* et *b* distincts). Comme *a* et *b* sont des nombres à 1 chiffe, la plus grande valeur pour *a* est 4 et pour son multiple *b* est 8.
Eve a formé 936. En effet, la plus grande valeur possible pour *c* est 9. Le nombre "*cde*"doit être multiple de 9, ce qui veut dire que "*de"*est multiple de 9. Et, parmi les neuf valeurs possibles, seul 936 est divisible aussi par ses deux derniers chiffres.
Finalement : 936 – 48 = 888.

3- rép C
L'octogone est découpé en un carré d'aire 1 et 4 triangles isocèles. La hauteur de ces triangles isocèles vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$ (différence entre le rayon du cercle circonscrit à l'octogone et le demi-côté du carré). L'aire d'un triangle isocèle vaut donc $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ et l'aire de l'octogone vaut 1 + ($\sqrt{2}-1$) = $\sqrt{2}$.



4 - rép D
Les côtés du rectangle mesurent 9x4 et 9x3, donc par Pythagore, la diagonale mesure 9x5 : *KM* = 45
Soit *O* le point d'intersection de [*XY*] et [*KM*]. *O* est le centre du rectangle, puisque (*XY*) est la médiatrice de [*KM*] : donc *OM* = 22,5.

Les triangles *LMK* et *OYM* sont semblables car leurs angles sont égaux. Donc $\frac{OM}{LK}=\frac{OY}{LM}$.

$\frac{22{,}5}{36}=\frac{OY}{27}$ d'où $OY=27\times\frac{22{,}5}{36}=3\times\frac{22{,}5}{4}$ et $XY=2OY=\frac{3\times 22{,}5}{2}=33{,}75$.

5- rép B
Soit *L* la longueur et *l* la largeur d'un rectangle.
Le périmètre de la figure 1 est 3*L* + 3*l* + (*L*—*l*) = 4*L* + 2*l* = 68.
Le périmètre de la figure 2 est 4*L* + 4*l* + (*L*—*l*) x 2 = 6*L* + 2*l* = 95.
En soustrayant membre à membre on a 2*L* = 27 et 2*l* = 95 — 3 x 27 = 14 ce qui donne un périmètre de 27+14 = 41 pour un rectangle.

6- rép C
Imaginons les jetons répartis en 2 sous ensembles, représentés ici en dix colonnes :

1er sous ensemble :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2è sous ensemble :	19	18	17	16	15	14	13	12	11	

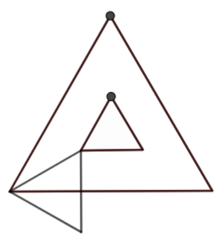
Si on prend dix jetons et qu'ils sont par malchance tous dans le 1er sous ensemble, il n'y a aucune paire dont la somme soit 20.
Par contre, si on prend onze jetons, comme il y a dix colonnes et onze jetons, il y en a forcément au moins deux qui sont dans la même colonne , autrement dit dont la somme vaut 20.

7- rép A
On calcule les valeurs de f(n) à partir de f(2). Il faut aller assez loin pour voir une période s'installer.
On a $f(16) = f(8)$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f(x)	123	14	17	50	25	29	85	**89**	145	42	20	4	16	37	58	**89**

Ainsi, pour tout x entier supérieur ou égal à 8, $f(x+8) = f(x)$,
donc pour tout entier $x \geq 8$ et pour tout entier k, $f(x+8k) = f(x)$.
Ainsi $f(100) = f(12+88) = f(12) = 4$.

8- rép D



Dans la figure ci-contre, tous les triangles sont équilatéraux pour des raisons angulaires (60°partout).
Elle montre que la moitié de la-différence entre les côtés du grand et du petit triangle est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $2\sqrt{3}$, soit $2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$. La différence cherchée vaut donc 6.

Remarque : on peut aussi astucieusement remarquer que si cette différence est constante, on peut se placer dans le cas particulier où le petit triangle est réduit à un point, centre du grand triangle situé à une distance $\sqrt{3}$ des côtés, ce qui signifie que la hauteur du grand triangle vaut $3\sqrt{3}$ et son côté (la différence cherchée) vaut 6.

9 - rép B
Alice connait la couleur ; Zoé la forme.
Si Alice sait que Zoé, connaissant la forme, ne sait pas la couleur, c'est que la forme n'est pas l'hexagone (qui est unique et blanc) . Cela élimine le 7. Et si Alice sait cela c'est que la couleur qu'elle connait n'est pas le blanc.
Zoé, qui a compris le raisonnement d'Alice, sait maintenant que la couleur n'est pas blanc. Et cela ne lui apporterait rien si la forme était le rond. Or cela lui a apporté une information supplémentaire, ce qui élimine 8 et 9.
Alice sait maintenant que les ronds sont éliminés. Et elle affirme qu'elle peut dire la forme. Si la couleur était le noir elle ne pourrait pas distinguer entre étoile et carré. Si elle peut maintenant dire la forme, c'est qu'elle a la couleur grise et que la forme est le triangle gris (dessin 4).

Subsidiaire commune à tous les sujets

Le nombre cherché, connu sous le nom de racine carrée de 2022, vaut 44,9666543 …

En calculant 44x44=1936 et 45x45=2025, on se doute que le nombre cherché vaut 44,9… et que le chiffre suivant est surement un 6 (par interpolation linéaire : 3/89 est entre 0,03 et 0,04).
On calcule alors 44,96x44,96=(45-0,04)x(45-0,04)~2025-90x0,04=2021,4.
Pour aller plus loin et si on est pressé par le temps, on peut avoir alors compris que x^2 augmente de $2xh$ quand x augmente de h, soit d'environ 0,1 quand on augmente de 0,001 autour de 50 ; pour augmenter de 0,6 il faut donc augmenter de 0,006, ce qui donne finalement la troisième décimale.