KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2019

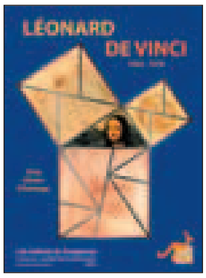
KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1990 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

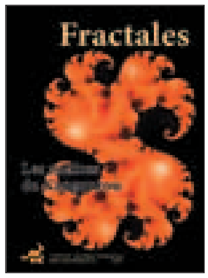
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, trois cent trente-cinq mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

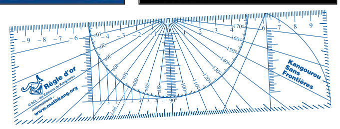
Il a été étendu dans le monde et réunit maintenant 6 millions de participants dans 79 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.aksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

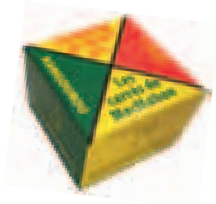
Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de mathématiques en couleurs) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation aux *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).









Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou 2020 aura lieu le jeudi 19 mars 2020.

Trophées Kangourou 2019 - Corrigé de l'épreuve Benjamins (6^e - 5^e)

1. Réponse **B.** Le seul segment qui apparaît dans tous les chiffres sauf l'un d'eux est le segment vertical en bas à droite, Il s'allume dans tous les chiffres sauf dans le 2.

2. Réponse **C.** 7 n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même, donc seul le 1 peut occuper la case suivante. Ensuite 2 ou 4 sont à essayer. Après 714, on peut placer 2, 3 ou 6, mais chacun mène à une impasse. L'unique solution est :

7	1	2	5	3	6	4

.

3. Réponse **D.** En combinant l'égalité 2 et l'égalité 4, on obtient $z=1$. De l'égalité 1, on déduit que w est pair. De l'égalité 3, avec $z=1$, on déduit que y est l'entier impair qui suit w (donc $y>1$).Comme y est un carré impair à 1 chiffre, c'est que $y=9$. Et alors : $x=3$, $w=8$, $v=4$ et $z=1$. $v+w+x+y+z=25$.

4. Réponse **D.** Les dessins A et B sont faciles à reconnaître (les deux faces de format 1×1, sur les côtés, étant blanches). Le dessin C est le même que le dessin B retourné. Sur le dessin E, les deux faces du dessus sont celles en bas du patron. Seul le dessin D ne peut pas être un dessin de la boîte.

5. Réponse **D.** On rappelle la disposition des places :

gauche	1	2	3	4	5	droite

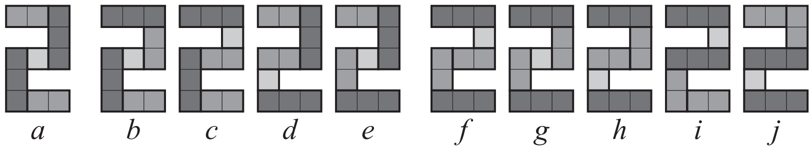
Compte-tenu de la nécessité de laisser libre la place 3, Jeanne (qui s'est déplacée de 2 places vers la droite) ne peut être que en 4 (et elle était en 2) ou en 5 (et elle était en 3).
• Si elle est en 4 venant de 2, les places échangées par Louise et Nina ne peuvent être que les places 1 et 5. Cathy était donc en 3 et s'est déplacée (d'une place vers la gauche) en 2. Anne était donc alors en 4.
• Si elle est en 5 venant de 3, Cathy (qui s'est déplacée d'une place vers la gauche) était en 2 ou en 5 ; si Cathy était en 2 et s'est déplacée en 1, il n'y a plus de place pour l'échange de Louise et Nina ; et si Cathy était en 5 et s'est déplacée en 4, les places échangées par Louise et Nina ne peuvent être que les places 1 et 2. Anne était donc alors en 4 aussi.

6. Réponse **C.** On remarque que $\frac{2019}{2018}=1+\frac{1}{2018}$ et que $\frac{20019}{20018}=1+\frac{1}{20018}$.

Or : $\frac{1}{20018}<\frac{1}{10000}<\frac{1}{2018}$. Donc $1+\frac{1}{20018}<1+\frac{1}{10000}<1+\frac{1}{2018}$ et $\frac{20019}{20018}<1{,}0001<\frac{2019}{2018}$.

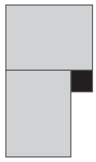
7. Réponse **E.** [KL] est partagé en 3 segments de longueur a, b, c et [KN] en 3 segments de longueur d, e, f.
Si on ajoute les quatre périmètres donnés, on trouve 30 cm. Le résultat de cette addition est $4b+4e+2a+2c+2d+2f$.
Si on ajoute le périmètre de KLMN (21 cm) et celui demandé, on trouve le même résultat $(4b+4e+2a+2c+2d+2f)$.
Le périmètre du parallélogramme grisé vaut donc $30-21$, soit 9 cm.

8. Réponse **E.** On peut placer…



… les deux barres de trois verticales, et il y a alors 1 seule possibilité pour les autres pièces (a) ;
… une des barres de trois horizontale et l'autre verticale, et cela de 2 façons, pour chacune desquelles il y a 2 façons de placer le carré tout seul (b, c et d, e),
… les deux barres de trois horizontales, et cela de 3 façons, pour lesquelles il y a 3 (f, g, h), 1 (i) et 1 (j) façons de placer le carré tout seul.
Au total, cela fait $1+4+5$, soit 10 façons de placer les 5 pièces.

9. Réponse **C.** Il faut d'abord isoler l'élément qui permet de reconstituer, par des translations, le pavage entier du plan. Cet élément se compose de deux rectangles gris et du petit carré noir.



L'aire du carré noir, de côté 2 cm, est 4 cm^2. L'aire de deux rectangles gris est $2\times(8\times6)$, soit 96 cm^2.
La proportion de noir dans l'élément élémentaire (et donc dans le pavage entier du plan) est $\frac{4}{4+96}$ soit $\frac{4}{100}$ ou $\frac{1}{25}$.

Subsidiaire. Réponse **24 804**. Voir fin de ce document.

Trophées Kangourou 2019 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4^e - 3^e)

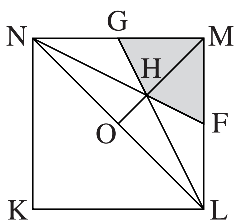
1. Réponse **D.** Gérard a écrit les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 et 31 (car 29+31=60), soit 11 nombres premiers.

2. Réponse **C.** Si le trésor est sur l'île Est, les phrases 2 et 4 sont justes. De même, si le trésor est sur l'île Ouest, les phrases 3 et 4 sont justes. Si le trésor est sur l'île Nord, les phrases 1 et 4 sont justes. Le trésor est donc sur l'île Sud et seule la phrase 1 est juste.

3. Réponse **C.** Si m et n sont les économies (en €) de Manon et Nathan, on a $\frac{m}{n}=\frac{5}{3}$ et $\frac{m-160}{n}=\frac{3}{5}$.
On a donc : $3m=5n$ et $5m-800=3n$. D'où $15n=9m=25m-4000$, soit $16m=4000$. Finalement $m=250$ et $n=150$.

4. Réponse **D.** Si on écrit 2331 comme un produit de nombres premiers, on trouve $2331=3\times3\times7\times37$.
Le nombre de trois chiffres tous différents est donc le résultat du produit de 2 ou 3 de ces facteurs.
$7\times37=259$ a bien trois chiffres tous différents, et c'est la seule possibilité. Les autres produits de 3 chiffres étant 111 (3×37), 333 (9×37) et 777 (21×37). Ainsi, le numéro de la chambre est 259, $2331=9\times259$, et le nombre fétiche de Noémie est 9.

5. Réponse **B.** Les trois médianes du triangle LMN, [MO], [LG] et [NF] découpent ce triangle en 6 petits triangles de même aire.

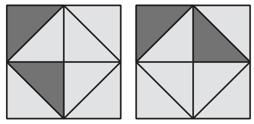


Chacun a une aire valant $\frac{1}{12}$ de l'aire du carré (puisque LMN mesure la moitié du carré KLMN).
Et GHFM, qui est la réunion de deux de ces petits triangles, a donc une aire valant $\frac{1}{6}$ de l'aire du carré.

6. Réponse **E.** Le volume du nouveau solide est la somme…
- du volume des 7 petits cubes de départ, $7u^3$;
- du volume des 12 demi-cubes qui remplissent les espaces entre deux cubes adjacents, $6u^3$;
- et du volume de 8 pyramides (ces pyramides ont 3 faces qui sont des demi-carrés et la dernière est un triangle équilatéral).

Le volume d'une de ces pyramides est $\frac{1}{3}\times\frac{u^2}{2}\times u$ soit $\frac{u^3}{6}$. Le volume des 8 pyramides est donc $\frac{4}{3}u^3$.
Ce qui donne un volume total de $\frac{13\times3}{3}u^3+\frac{4}{3}u^3$, soit $\frac{43}{3}u^3$.

7. Réponse **D.** Il y a 28 possibilités pour noircir 2 triangles parmi 8 $\left(28=\frac{7\times8}{2}\right)$.



Si ces 2 triangles sont tous les deux à un « *coin* » ou « *au centre* », la figure a un axe de symétrie. Pour que la figure n'ait pas d'axe de symétrie, les deux triangles noircis sont donc un *coin* (et il y a 4 *coins* possibles) et un *au centre* (et il y a alors 2 possibilités comme sur la figure ci-contre).

Cela fait 8 possibilités pour que la figure n'ait pas d'axe de symétrie ; et donc une probabilité de $\frac{8}{28}$ ou $\frac{2}{7}$.

La probabilité que la figure avec deux triangles noircis ait un axe de symétrie est donc de $\frac{5}{7}$.

8. Réponse **A.** De l'analyse du premier affichage, on déduit que les 2 segments hors d'usage sont les segments verticaux du haut à droite et du bas à gauche (en particulier, le premier chiffre ne peut être que 2 parmi les seules possibilités 0, 1 et 2). Il était donc 23h47. Il est maintenant 3h45 après 23h47 soit 3h32 le lendemain. Compte-tenu des 2 segments hors d'usage, c'est l'affichage A qui correspond à 03:32.

9. Réponse **E.** Soit n le numérateur de la grande fraction et d son dénominateur. n, comme d, sont des sommes de 25 termes.
$n = 3 + (3+4) + (3+2\times4) + (3+3\times4) + \ldots\ \ldots + (3+24\times4) = (25\times3) + 4\times(1+2+3+\ldots+24) = 75 + 4\times300 = 1275$.
Chaque terme de d étant décalé de 2 par rapport au terme de n de même rang, on a donc $d=n+2\times25 = n+50$.
Alors $\frac{n}{d} = \frac{1275}{1335} = \frac{25\times51}{25\times53} = \frac{51}{53}$.

Subsidiaire. Réponse **8 171 255**. Voir fin de ce document.

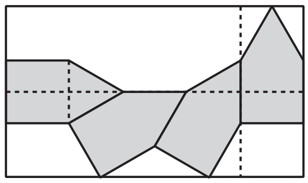
Trophées Kangourou 2019 - Corrigé de l'épreuve Lycées

1. Réponse **C.** Les deux premières inégalités s'excluent mutuellement ; les deux suivantes aussi. Tout x vérifiant la quatrième inégalité $(0<x<1)$ vérifie aussi les première et cinquième, donc vérifie 3 des affirmations. 3 est donc le maximum cherché.

2. Réponse **B.** (NJ) est une médiane du triangle LMN, (KM) est une autre médiane, donc I est le centre de gravité de LMN.
On a donc $\mathrm{IJ}=\frac{\mathrm{NJ}}{3}$. Et (théorème de Pythagore pour le triangle NJM) : $\mathrm{NJ}^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$. D'où $\mathrm{IJ}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}a}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{6}$.

3. Réponse **B.** Soit $\frac{n}{d}$ la fraction de départ et x ce qu'il faut retrancher au dénominateur.
On a $2\times\frac{n}{d}=\frac{1{,}4\times n}{d-x}$ et donc $2d-2x=1{,}4\,d$. D'où $x=\frac{0{,}6\,d}{2}=0{,}3\,d$. Il faut donc diminuer le dénominateur de 30 %.

4. Réponse **A.** Tous les angles de la figure mesurent 90°, 60°, 30° ou leurs supplémentaires.



Soient a le côté du carré et $b=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ la hauteur du triangle équilatéral de côté a.
La largeur ℓ du grand rectangle est $a+2b=a(1+\sqrt{3})$.
La longueur L du grand rectangle est $3a+2b=a(3+\sqrt{3})=a\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$. D'où le rapport $\frac{L}{\ell}=\sqrt{3}$.

5. Réponse **E.** Différents chemins mènent à la sortie 4. Tous comportent 3 choix vers l'Est et 3 choix vers le Nord.
Ils ont donc tous la même probabilité d'être parcourus, qui est de $\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^6}=\frac{8}{729}$.
Reste à compter le nombre de chemins menant à cette sortie 4 (égal au nombre de façons d'arriver à l'intersection Nord-Est qui mène à 4 ou 5). Pour cela, on peut compter les mots de 5 lettres formés avec 2N et 3E. Or il y a $\frac{5\times4}{2}$, soit 10 façons de placer les deux lettres N dans ce mot de 5 lettres. La probabilité de sortir par la sortie 4 est donc $10\times\frac{8}{729}$ soit $\frac{80}{729}$.

6. Réponse **E.** Les triangles de même sommet ont leurs aires dans le rapport de leur base : les aires de SRK et SRT sont égales.
Et donc $\mathrm{RT}=\mathrm{RK}=\frac{1}{2}\mathrm{KT}$.
Le point L est placé de façon que l'aire de LST soit la même que celle de SRK ou SRT ; et donc le tiers de celle de LTK.
L est donc tel que S est au tiers de [LK] à partir de L.
Puis M est placé de façon que l'aire de MLT soit la même que celle des trois autres triangles ; et donc le quart de celle de LTK.
T est donc au quart de [MK] à partir de M, c'est-à-dire $\mathrm{MK}=4\,\mathrm{MT}$ ou $\mathrm{KT}=3\,\mathrm{MT}$.
Donc $\mathrm{MR}=\mathrm{MK}-\mathrm{RK}=4\,\mathrm{MT}-\frac{1}{2}(3\,\mathrm{MT})=\frac{5}{2}\mathrm{MT}$. Et, finalement : $\frac{\mathrm{KT}}{\mathrm{MR}}=\frac{6}{5}$.

7. Réponse **A.** Les nombres $k=1$ et $k=3$ ne conviennent pas. On suppose donc k différent de 1 et 3. Le nombre $3k$ admet comme diviseurs 1, 3, k et $3k$ et ces nombres sont les 4 diviseurs de $3k$.
Si k est un nombre premier, alors soit $k \neq 5$ et $5k$ admet 4 diviseurs (1, 5, k, $5k$), soit $k=5$ et $5k$ admet 3 diviseurs (1, 5 et 25).
Donc k n'est pas un nombre premier et k est une puissance de 3 (sinon $3k$ admettrait un autre diviseur entre 3 et k).
Pour que $3k$ admette 4 diviseurs, la seule puissance de 3 possible pour k est $k=9$; et alors $5k$, égal à 45, admet bien 6 diviseurs (1, 3, 5, 9, 15 et 45). Donc $k=9$ et le chiffre des unités de $2019 \times k$ est 1.

8. Réponse **D.** Appelons a, b, c, d, e, f, g et h les huit nombres placés dans les cases (voir figure).
On a : $a+b+c+d+e+f+g+h=36$ (somme des entiers de 1 à 8).
N étant la valeur commune aux 4 lignes ou colonnes, on a : $N=a+b+c=f+g+h=a+d+f=c+e+h$.
En ajoutant, on obtient $4N=(a+b+c+d+e+f+g+h)+(a+f+c+h)=36+(a+f+c+h)$.
La somme des coins $a+f+c+h$ est donc un multiple de 4. Elle est aussi au moins égal à 10 $(1+2+3+4=10)$.
Le plus petit multiple de 4 supérieur à 10 est 12 ; et comme un remplissage est possible avec cette somme (voir ci-contre), le minimum cherché est 12.

a	b	c
d		e
f	g	h

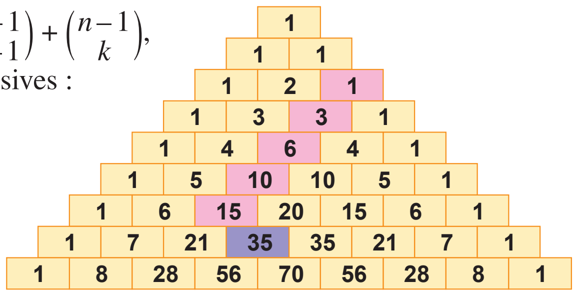
2	4	6
7		5
3	8	1

9. Réponse **C.** Le nombre à 4 chiffres s'écrit $1000m+100c+10d+u$.
• En supprimant le chiffre des unités, $100m+10c+d$ divise $1000m+100c+10d+u$ et aussi $10(100m+10c+d)$ donc leur différence u. Le chiffre u est donc nul. Les nombres à chercher sont de la forme $1000m+100c+10d$.
• En supprimant le chiffre des dizaines, $100m+10c$ divise $1000m+100c+10d$ et aussi $10(100m+10c)$ donc leur différence $10d$. Le chiffre d est donc nul. Les nombres à chercher sont de la forme $1000m+100c$.
• En supprimant le chiffre des centaines, $100m$ divise $1000m+100c$; m divise donc $10m+c$ et donc c.
En supprimant le chiffre des milliers, $100c$ divise $1000m+100c$; c divise donc $10m+c$ et donc $10m$.
Finalement m divise c qui divise $10m$.
Si $m=c$, on trouve 9 nombres : 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800 et 9900.
Si $m=1$, on trouve en plus 1200 et 1500. Si $m=2$, on trouve en plus 2400. Si $m=3$, on trouve en plus 3600. Si $m=4$, on trouve en plus 4800.
Au total, cela fait 14 nombres.

Subsidiaire. Réponse **1 375 775 540.**

Questions subsidiaires

• Pour l'épreuve *6e-5e*, on peut avoir le temps d'écrire les 52 premiers nombres triangulaires (en ajoutant les entiers successifs) puis de faire 52 additions (ou d'évaluer leur somme d'un coup d'œil raisonnable, par exemple en multipliant le trentième par 50, ce qui donne 23250) :
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275, 1326, 1378.
• Pour l'épreuve *4e-3e*, on peut avoir déjà « vu » que la somme des n premiers entiers est de l'ordre de $n^2/2$ et que la somme des premiers carrés est de l'ordre de $n^3/3$ (plus tard on pensera aux primitives des fonctions puissance). Ainsi le 365e nombre tétraédrique est de l'ordre de $365^3/6$; 350^2 valant 122 500, on peut évaluer ce nombre entre $122\,500 \times 60$ et $122\,500 \times 70$, soit autour de 8 000 000.
• La même idée, pour l'épreuve *Lycées*, donne environ 8 000 000 000/6, soit 1 333 333 333.
Et pour ceux qui connaîtraient le triangle de Pascal et l'égalité, $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, qui permet de le construire, le dessin ci-contre illustre les relations successives :



$$\binom{7}{3}=\binom{6}{2}+\binom{6}{3}$$
$$\binom{7}{3}=\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$$
$$\binom{7}{3}=\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$$
$\binom{7}{3}=\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$ qui permet de comprendre que :

la somme des $n-2$ premiers nombres triangulaires vaut $\binom{n}{3}$, soit $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

… le 52e nombre tétraédrique est 24 804 ;
… le 365e nombre tétraédrique est 8 171 255 ;
… le 2020e nombre tétraédrique vaut $\dfrac{2020 \times 2021 \times 2022}{6}$, soit exactement 1 375 775 540.