KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

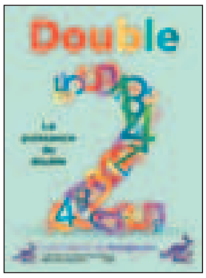
LES TROPHÉES KANGOUROU 2018

KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1990 sur le modèle du concours national australien (d 'où son nom).

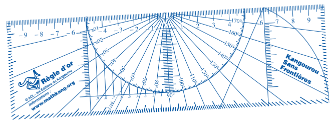
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, trois cent vingt-deux mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

Il a été étendu dans le monde et réunit maintenant 6 millions de participants dans 75 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.aksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).



Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation aux *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).



Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou 2019 aura lieu le jeudi 21 mars 2019.

Trophées Kangourou 2018 - Corrigé de l'épreuve Benjamins (6^e - 5^e)

1. Réponse **C.** Paul, pour avoir une somme de 7, ne peut avoir choisi que les cartes 1, 2, 4. Et Marie a choisi ou bien les cartes 1, 2, 5 ou bien les cartes 1, 3, 4. Dans les deux cas, il y a 2 cartes communes.

2. Réponse **B.** Les côtés des carrés d'aires respectives 9 cm^2, 16 cm^2 et 25 cm^2 mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm.
Et l'aire du demi-rectangle grisé est $\dfrac{(3+4+5)\times 5}{2}$, soit 30 cm^2.

3. Réponse **B.** De (1) et (2), on déduit que 4 ne fait pas partie du code. De (3), on déduit alors que 8 et 2 figurent dans le code. Avec (1), on sait que 8 est le chiffre des unités du code. De (3) et (4), on déduit que 2 est le chiffre des centaines. Avec (2), on déduit alors le chiffre des dizaines du code : le 1 (celui qui n'est pas à sa place). Le code est 218.

4. Réponse **E.** En regardant les chiffres des centaines, on conclut $Z > X$.
Il y a donc une retenue (de 1) pour les unités et $Z+Y=X+10$. Et, en regardant la colonne des dizaines où $Y+Z>10$, on a $Y+Z+1=14$ soit $Y+Z=13$ et $X=3$.
D'où $Z=7$ ($X+X+$retenue de 1) et $Y=6$. L'addition est $367+376=743$ et $X+Y+Z$ vaut 16.

5. Réponse **D.** Les trois morceaux gris en dessous de la droite remplissent exactement les blancs au-dessus de la droite.
L'aire cherchée est donc celle d'un demi-disque de rayon 11 cm ; soit $\dfrac{11\times 11\times \pi}{2}$ ou $\dfrac{121\pi}{2}$ cm^2.

6. Réponse **A.** Il y a 6 sortes de gnomis différents, qu'il est naturel d'appeler r2, r3, r4, b2, b3, b4.
Si le premier de la ligne est par exemple r2, il y a deux façons de poursuivre la rangée : r2 b3 r4 b2 r3 b4 ou r2 b4 r3 b2 r4 b3.
Comme il y a 6 façons de choisir le premier, il y a 6×2, soit 12 façons de former une ligne convenable.

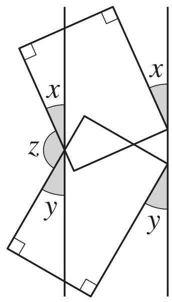
7. Réponse **D.** En additionnant successivement les premiers entiers (ou en utilisant une formule connue*), on trouve : $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105$. Le dernier terme de l'addition est donc le dernier des 14. Les termes multiples de 3 dans l'addition sont 3, 6, 9 et 12. Ils sont au nombre de $3+6+9+12=30$.
*La somme des n premiers entiers de 1 à n est $n(n+1)/2$.

8. Réponse **D.** La somme des chiffres d'un nombre de trois chiffres tous impairs est impaire. Si elle est multiple de 9, c'est qu'elle vaut 9 ou 27. Pour une somme des chiffres égale à 27, il y a un seul nombre : 999.
Pour une somme des chiffres égale à 9, on peut avoir les chiffres :
- 1, 1 et 7, ce qui donne 3 nombres : 117, 171, 711 ;
- 1, 3 et 5, ce qui donne 6 nombres : 135, 153, 315, 351, 513, 531 ;
- 3, 3 et 3, ce qui donne 1 nombre : 333.
Il y a donc $1+3+6+1$, soit 11 nombres satisfaisant aux conditions.

9. Réponse **C.** On cherche d'abord l'ordre de grandeur des 3 facteurs du produit : $70\times70\times70=343\,000$, $80\times80\times80=512\,000$ et le produit est entre 470 000 et 480 000. Comme le chiffre des unités du produit est 4, aucun des trois facteurs ne peut avoir 0 ou 5 comme chiffre des unités. Il n'y a donc que quatre produits possibles $71\times72\times73$, $72\times73\times74$, $76\times77\times78$ et $77\times78\times79$ et seuls le deuxième et le quatrième donne un chiffre des unités égal à 4. On a $72\times73\times74=388\,944$ et $77\times78\times79=474474$. C'est ce dernier qui a la forme voulue avec 44 au milieu de son écriture.

Subsidiaire. Réponse **441**. Voir fin de ce document.

Trophées Kangourou 2018 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4^{e} - 3^{e})



1. Réponse **C.** Bébé Kang peut obtenir toutes les hauteurs paires entre 12 et 30, sauf 28, soit 9 hauteurs : 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 30.

2. Réponse **B.** En traçant la droite verticale passant par le sommet de l'angle z, on trouve $z=180°-x-y=110°$.

3. Réponse **D.** $2{,}017\times2018 = 2017\times2{,}018$.
Donc $2{,}017\times2018 - 1{,}018\times2017 = 2017\times(2{,}018 - 1{,}018) = 2017$.

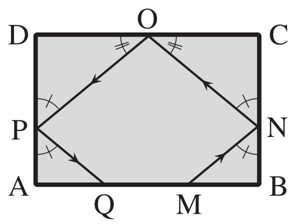
4. Réponse **B.** Bill a fait 300 m pendant que Zed faisait trois fois plus, soit 900 m, ou 5 fois le périmètre de la piscine, qui fait donc 180 m.
La largeur de la piscine est donc $\dfrac{180-50-50}{2}$, soit 40 m.

5. Réponse **C.** Si x est le nombre à cinq chiffres, $10x+1=3\times(100\,000+x)$, d'où $7x=299\,999$ et $x=42857$. La somme cherchée est $4+2+8+5+7=26$.

6. Réponse **A.** Les hauteurs de GIF et IHDE étant égales, le rapport cherché vaut $\dfrac{\text{FI}}{\text{IH}+\text{ED}}$.
Or, r étant le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone, on a $r=\text{ED}$, $\text{IH}=\dfrac{r}{2}$ et $\text{FI}=\dfrac{2r-\text{IH}}{2}=\dfrac{3}{4}r$. Et $\dfrac{\text{FI}}{\text{IH}+\text{ED}}=\dfrac{3}{4}:\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

7. Réponse **D.** En additionnant $20+18+14$, on compte trois fois ceux qui ont lu les trois dossiers et deux fois ceux qui ont lu deux dossiers. Le nombre de collégiens ayant participé est donc de $(20+18+14) - 2\times10 - 8 = 24$.

8. Réponse **B.** Supposons que le total des stagiaires soit 100, et appelons p le nombre de ceux qui ont joué à la pétanque. On a $45=\dfrac{100p}{p+22}$, donc $55p=22\times45$. D'où $p=18$. Le pourcentage de ceux qui ont fait la balade est donc $100-22-18$, soit 60.
On peut aussi dire : 22% du total des stagiaires égale $100-45$ soit 55% de ceux qui sont restés au centre ;
2% du total des stagiaires égale 5% de ceux qui sont restés au centre ;
40% du total des stagiaires égale 100% de ceux qui sont restés au centre ; et donc 60% ont fait la balade.



9. Réponse **C.** Les quatre triangles MBN, NCO, ODP et PAQ sont semblables et ont donc leurs côtés proportionnels : $\dfrac{9}{8}=\dfrac{\text{BM}}{\text{BN}}=\dfrac{\text{CO}}{\text{CN}}=\dfrac{\text{DO}}{\text{DP}}=\dfrac{\text{AQ}}{\text{AP}}$. D'où successivement :
$\text{CN} = 20-8= 12$. $\text{CO} = 12\times\dfrac{9}{8}=\dfrac{27}{2}$. $\text{DO} = 30-\dfrac{27}{2}=\dfrac{33}{2}$. $\text{DP} = \dfrac{33}{2}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{44}{3}$.
$\text{AP} = 20-\dfrac{44}{3}=\dfrac{16}{3}$. $\text{AQ} = \dfrac{16}{3}\times\dfrac{9}{8}= 6$.

Subsidiaire. Réponse **1793**. Voir fin de ce document.

Trophées Kangourou 2018 - Corrigé de l'épreuve Lycées

1. Réponse **E.** Appelons n le nombre de termes égaux cherché. En élevant au carré on a $n \times 2018^2 = 2018^{20}$. D'où $n = 2018^{18}$.

2. Réponse **B.** La fraction de stagiaires n'ayant pas participé au tournoi de pétanque est $\frac{1}{3}$.

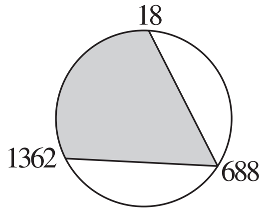
La fraction de stagiaires n'ayant pas participé au tournoi d'échecs est $\frac{1}{4}$. Donc, au maximum, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ soit $\frac{7}{12}$ n'ont pas participé à la fois aux deux tournois. Et $1-\frac{7}{12}$, soit $\frac{5}{12}$, au minimum, ont participé aux deux tournois.

3. Réponse **D.** M $(-2\,;1)$ étant le milieu de [AB], on a $\frac{p+r}{2}=-2$ et $\frac{q+s}{2}=1$.

De même on a $\frac{p+t}{2}=3$ et $\frac{q+u}{2}=2$ (P milieu de [AC]) et $\frac{r+t}{2}=2$ et $\frac{s+u}{2}=-1$ (N milieu de [BC]).

Ce qui donne $p+q+r+s+t+u=-2+1+3+2+2-1=5$.

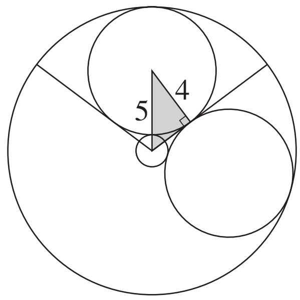
4. Réponse **C.** Un polygone a $(688-18)+1$, soit 671 côtés.
Un deuxième polygone a $(1362-688)+1$, soit 675 côtés.
Le troisième polygone, grisé sur la figure, a $(2018-1362)+18+2$, soit 676 côtés. C'est celui des trois qui a le plus de côtés.
On peut vérifier que la somme des côtés des trois polygones est 2022 (2018 qui sont ceux du polygone régulier de départ et chacune des 2 diagonales est comptée 2 fois).



5. Réponse **B.** Les deux cercles concentriques ayant pour rayons 1 et 9, les cercles à l'intérieur de l'anneau ont pour diamètre $9-1$, soit 8 et donc pour rayon 4.
Sur la figure, nous avons tracé le secteur angulaire dont les demi-droites sont tangentes à un cercle de l'anneau. Appelons x le demi-angle de ce secteur.
Le triangle rectangle grisé sur la figure a un côté égal à 4 et son hypoténuse mesure $4+1$ soit 5 ;
c'est donc un triangle rectangle (3, 4, 5). Et on a $\cos x=\frac{3}{5}$ et $\sin x=\frac{4}{5}$.

D'où $x>45°$ et, comme $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$ et $\cos(60°)=\frac{1}{2}$, $x<60°$.

L'angle $2x$ est donc strictement compris entre 90° et 120°, c'est-à-dire entre $\frac{360°}{4}$ et $\frac{360°}{3}$:
on peut placer 3 cercles (tangents au petit et au grand) dans l'anneau mais pas 4.



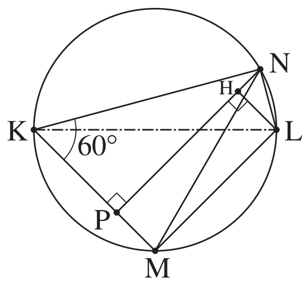
6. Réponse **E.** On choisit P_0 comme origine. Soit a_n l'abscisse de P_n. On a $a_0=0$ et $a_1=1$.

P_n étant le milieu de $[P_{n+1}P_{n+2}]$, on a la relation $a_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_{n+2})$ et donc $a_{n+2}=2a_n-a_{n+1}$.

On peut donc calculer de proche en proche : $a_2=-1$, $a_3=3$, $a_4=-5$, $a_5=11$, $a_6=-21$, $a_7=43$, $a_8=-85$, $a_9=171$, $a_{10}=-341$ et finalement $a_{11}=683$.

7. Réponse **D.** *1re solution.* On projette L sur (NP) en H. PMLH est un rectangle.
Les angles $\widehat{\text{LNH}}$ et $\widehat{\text{NKP}}$ ayant leurs côtés perpendiculaires sont égaux. Alors, $\sin(60°)=\frac{\text{LH}}{\text{LN}}$.
$\text{LH}=\text{PM}=3$; donc $\text{LN}=\frac{3}{\sin(60°)}=2\sqrt{3}$.

2e solution. En utilisant le théorème de l'angle inscrit, on observe que $\widehat{\text{KLN}}=\widehat{\text{NMP}}$.
On en déduit que les triangles rectangles KLN et NMP sont semblables,
donc $\frac{\text{NL}}{\text{PM}}=\frac{\text{KN}}{\text{PN}}=\frac{1}{\sin(60°)}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, et $\text{NL}=2\sqrt{3}$.



8. Réponse **C.** Soient f le nombre de filles de la classe, g le nombre de garçons et $n=f+g$.

On a $f=\frac{140}{100}g=\frac{7}{5}g$ donc $n=\frac{12}{5}g$. Et alors $g=\frac{5n}{12}$ et $f=\frac{7n}{12}$.

Lorsqu'on choisit deux élèves, la probabilité de choisir une fille puis un garçon est $\dfrac{fg}{n(n-1)}$;
c'est aussi la probabilité de choisir un garçon puis une fille.
La probabilité d'avoir une fille et un garçon est donc $\dfrac{2fg}{n(n-1)} = \dfrac{1}{2}$. Ce qui donne $4 \times \dfrac{5n}{12} \times \dfrac{7n}{12} = n(n-1)$.
D'où $35n = 36(n-1)$ et $n = 36$. Il y a 36 élèves dans la classe.

9. Réponse **A.** Soit P le plan passant par le centre du cube et perpendiculaire à une diagonale.
L'intersection de P et du cube est un hexagone (comme sur les cinq réponses proposées) et celle de P avec le cube central ($1/27^{e}$ du cube) est aussi un hexagone (de côté égal à 1/3 du premier) comme montré sur la figure 1
Les traces, sur le plan P, des 6 plans de section du cube triplement troué sont les prolongements des côtés du petit hexagone (figure 2). Dans chacune des trois directions, il y a un trou dans le cube (de section carrée), défini par deux paires de plans de section. L'intersection de ces plans avec le cube troué dans une direction est donc celle montrée figure 3. Les figures 4 et 5 montrent ces intersections pour les deux autres directions.
Les figures 6 et 7 montrent alors le cube troué dans ces trois directions.
La photo montre la moitié d'un cube triplement troué.

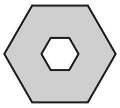


figure 1

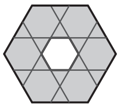


figure 2

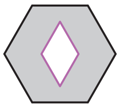


figure 3

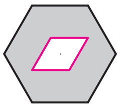


figure 4

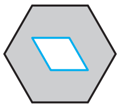


figure 5

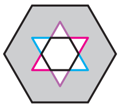


figure 6

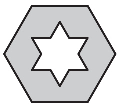
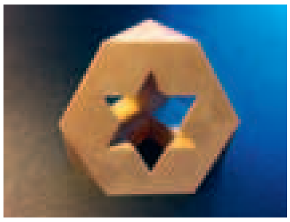


figure 7



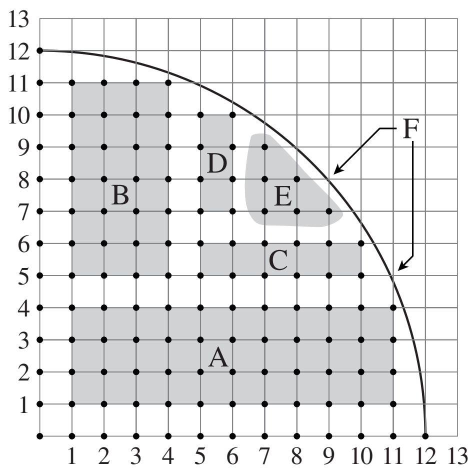
Subsidiaire. Réponse **3001.**

Questions subsidiaires

La suite des nombres de points à coordonnées entières, situés à l'intérieur d'un cercle de rayon N, parfois appelés nombres de Gauss, est ici noté g(N) ; elle porte le numéro A000328 dans l'OEIS (voir ce site internet). Voici les valeurs de g(N) de N = 0 à N = 39, et donc pour **N = 12**, **N = 24** et **N = 31**, choisies pour les questions subsidiaires de ces sujets :

1	5	13	29	49	81	113	149	197	253
317	377	**441**	529	613	709	797	901	1009	1129
1257	1373	1517	1653	**1793**	1961	2121	2289	2453	2629
2821	**3001**	3209	3409	3625	3853	4053	4293	4513	4777 …

Vous noterez que l'affiche du 29^{e} Kangourou, en 2019, sera une illustration de g(3).
Pour évaluer g(N), on comprend facilement qu'il est proche de l'aire du disque de rayon N, soit πN^2. Ce nombre n'est, en effet, pas très loin du nombre de carrés unités approchant l'aire du disque.
Pour un véritable comptage, on pourrait dessiner un quart de cercle sur un papier quadrillé et compter les points situés dans six zones : 4 rectangles intérieurs au disque (A + B + C + D), la zone restante à l'intérieur du disque (E), les points frontières douteux (F, en utilisant Pythagore). En ajoutant les points sur les axes, on obtient le nombre cherché :
$1 + 4N + 4(A + B + C + D + E + F)$.



La figure est faite pour N = 12.

Question subsidiaire Benjamins (N = 12).
$A = 11 \times 4 = 44$, $B = 4 \times 7 = 28$, $C = 6 \times 2 = 12$, $D = 2 \times 4 = 8$ et $E = 6$.
Pour la zone F, il y a 4 points douteux : (9,8) (11,5) et leurs symétriques (par rapport à la première bissectrice). Le théorème de Pythagore permet de s'assurer s'ils sont à l'intérieur ou à l'extérieur du disque : $12^2 = 144$,
$9^2 = 81$, $8^2 = 64$, $81 + 64 = 145$, le point (9,8) est à l'extérieur.
$11^2 = 121$, $5^2 = 25$, $121 + 25 = 146$, le point (11,5) est à l'extérieur.
Au total $A + B + C + D + E + F = 44 + 28 + 12 + 8 + 6 + 0 = 98$. Il y a 98 points strictement à l'intérieur d'un quart de disque.
Finalement : $g(12) = 1 + 4 \times 12 + 4 \times 98 = 441$.

Question subsidiaire Cadets (N = 24) : on peut prendre $A = 22 \times 9 = 198$, $B = 9 \times 13 = 117$, $C = 10 \times 5 = 50$, $D = 5 \times 5 = 25$, $E = 6 + 6 + 10 + 6 + 6 = 34$, $F = 0$ et $g(24) = 1 + 4 \times 24 + 4 \times 424 = 1793$.

Question subsidiaire Juniors (N = 31) : on peut prendre $A = 29 \times 10 = 290$, $B = 10 \times 19 = 190$, $C = 15 \times 7 = 105$, $D = 8 \times 8 = 64$, $E = 7 + 14 + 28 + 14 + 7 = 70$, $F = 0$ et $g(31) = 1 + 4 \times (31 + 719) = 3001$.