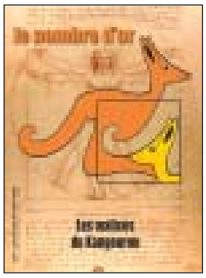
KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2013

KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1991 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

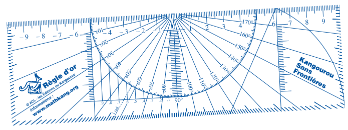
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, plus de trois cents mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 6 millions de participants dans 60 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.math-ksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.



Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation au week-end parisien des *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).



Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou 2014 aura lieu le jeudi 20 mars 2014.

Trophées Kangourou 2013 - Corrigé de l'épreuve Benjamins (6^e - 5^e)

1. Réponse **B.** $\frac{1}{2}$ min = 30 s (temps de Gabriel) et $\frac{1}{100}$ h = 36 s (temps de Vincent). Gabriel l'emporte donc de 6 secondes.

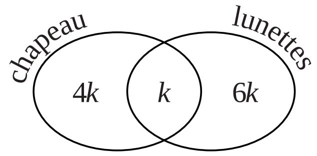
2. Réponse **B.** La somme des 10 notes est $10 \times 9{,}2$, soit 92.
La note la plus basse possible est obtenue lorsque les 9 autres notes sont les meilleures possibles (10) et vaut donc 2.

3. Réponse **C.** En notant « I » pour un chiffre impair et « P » pour un chiffre pair :
Les nombres de la forme « IPP » sont au nombre de $5 \times 5 \times 5 = 125$.
Les nombres de la forme « PIP » sont au nombre de $4 \times 5 \times 5 = 100$.
Les nombres de la forme « PPI » sont au nombre de $4 \times 5 \times 5 = 100$.
(Il n'y a que 4 possibilités pour le chiffre des centaines quand il est pair, car 0 est exclu de cette place.)
D'où, au total, 325 nombres possibles.

4. Réponse **D.** Suivons le cheminement des chapeaux a, b, c, d en partant de la situation abcd : bacd - bcad - bcda - acdb.
Après 4 coups, Anne retrouve son chapeau pour la première fois et les trois autres ont été permutés, le deuxième passant en dernier, le dernier en avant-dernier. Après 8 coups, on obtiendra donc adbc. Et après 12 coups, abcd de nouveau.

5. Réponse **E.** En joignant les 4 centres des cercles, on obtient un carré de côté 2 et d'aire 4.
La surface grisée est obtenue en enlevant à ce carré les 4 quarts de cercle de rayon 1, soit un cercle entier d'aire π. La réponse est donc $4 - \pi$.

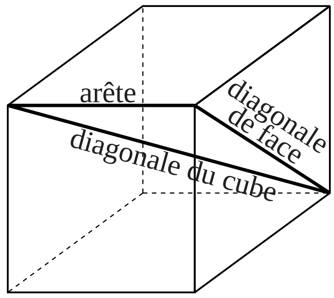
6. Réponse **D.** Soit k le nombre de kangourous ayant chapeau et lunettes.



Le nombre de kangourous ayant chapeau sans lunettes est donc $4k$ (on a bien $4+1=5$).
Le nombre de kangourous ayant lunettes sans chapeau est donc $6k$ (on a bien $6+1=7$).
$4k+6k=120$ donc $k=12$.
Le nombre total de kangourous est $11k$ soit 132.

7. Réponse **E.** Le nombre de coloriages où II et III sont de la même couleur est : $3\times(2\times2)\times3=36$, car il y a 2 possibilités pour la couleur de II et III et, pour chacune, 2 possibilités pour la couleur de IV.
Le nombre de coloriages où II et III sont de couleurs différentes est : $3\times(2\times1)\times3=18$, car il y a 2 possibilités pour le placement des couleurs de II et III et alors 1 seule possibilité pour la couleur de IV.
Au total : $36+18=54$.

8. Réponse **C.** Si on choisit 3 sommets sur le cube de façon à ce que 2 d'entre eux ne soient pas les extrémités d'une même arête, le triangle obtenu est équilatéral (ses 3 côtés sont des diagonales de face) et non rectangle.



Les triangles rectangles cherchés ont donc deux sommets sur une même arête ; un deuxième côté est alors…
… soit une autre arête et leur 3 sommets sont alors sur une même face du cube ; il y en a $4\times6=24$,
… soit, dans l'une des deux faces perpendiculaires à ce premier côté, une diagonale de face du cube ; leur troisième côté est alors une diagonale du cube ; il y en a $2\times12=24$.
(Si le deuxième côté est une diagonale du cube, le troisième est obligatoirement une diagonale de face et il est déjà compté.)
Au total, $24+24$ soit 48 triangles rectangles.

On pourrait aussi montrer qu'il y a 56 triangles ayant leurs 3 sommets parmi les 8 du cube $\left(\dfrac{8\times7\times6}{1\times2\times3}\right)$ et que ce sont les 48 triangles rectangles explicités et les 8 triangles équilatéraux (chacun isolant un sommet du cube).

9. Réponse **B.** On peut choisir l'effectif des votants, car on ne s'intéresse qu'aux pourcentages. Choisissons 1000 votants.
Quand 300 votes avaient été dépouillés, on avait 99 OUI (33 % de 300).
Quand 400 votes avaient été dépouillés, on avait 144 OUI (36 % de 400).
Entre ces deux instants, il y a eu $144-99$, soit 45 votes OUI, sur les 100 bulletins rajoutés.

Subsidiaire. Réponse **464.**
Avec les données, on considère une distance, égale au périmètre d'un cercle de rayon 6380 km, parcourue en un jour.

La vitesse correspondante est, en m/s, $\dfrac{2\times\pi\times6380\times1000}{24\times60\times60}$ dont une valeur approchée, au dixième près, est 464.

Pour faire une approximation rapide, on peut, en prenant $\pi\approx3{,}14$ et $6380\approx6400$, calculer $\dfrac{2\times3{,}14\times6400\times1000}{3\times8\times3\times20\times3\times20}=\dfrac{3140}{27}\times4$.

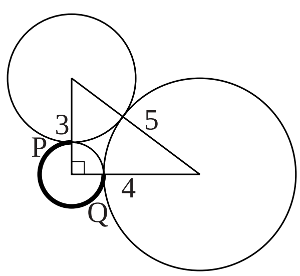
La division de 3140 par 27 donne 116, qui multiplié par 4 donne 464 (on pourrait plus mal tomber) !
En réalité (la Terre n'étant pas vraiment ronde, Quito étant à 2000 mètres d'altitude, etc.) le calcul n'est pas le bon mais l'erreur sur le résultat est de l'ordre du mètre par seconde).

Trophées Kangourou 2013 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4^e - 3^e)

1. Réponse **C.** Dans le nouveau solide, on retrouve les 12 arêtes du cube d'origine (plus courtes), auxquelles il faut ajouter les 9 nouvelles arêtes créées à chaque sommet du cube, soit au total $12+9\times8=84$.

2. Réponse **D.** La grille rectangulaire a 2013 cases c'est-à-dire $3\times11\times61$. Puisque 50 est sur la deuxième ligne le nombre de colonnes est inférieur à 50 et supérieur à 25. Le seul diviseur de 2013 entre 25 et 51 est 33 ; la grille comporte donc 33 colonnes. La ligne 30 se termine à 990 et 1000 est sur la 31^e ligne. 100 est bien sur la quatrième ligne (cette information n'était pas nécessaire).

3. Réponse **E.** Le triangle joignant les 3 centres des cercles a pour dimensions 3, 4 et 5.
Il est donc rectangle.



Le grand arc de cercle $\overset{\frown}{PQ}$ correspond donc à $\dfrac{3}{4}$ du cercle de rayon 1 cm.

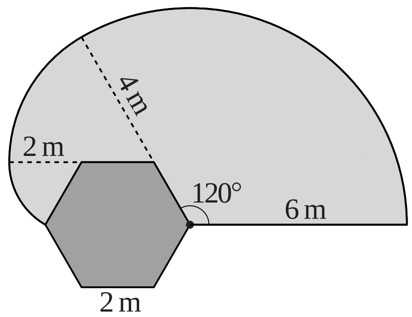
Et la longueur de cet arc est, en cm, $\dfrac{3}{4}\times2\pi$, soit $\dfrac{3\pi}{2}$.

4. Réponse **D.** Soit t le temps de parcours (en heures) avant qu'Ali et Béa ne se croisent en ayant fait à eux deux 60 km.
On a $18t + 22t = 60$ d'où $t = 1{,}5$. Et 1 heure et demie après 11 h, il est 12 h 30.
(On peut dire aussi que Béa et Ali se rapprochent à la vitesse de 40 km/h et mettent donc 1 heure et demie pour faire 60 km.)

5. Réponse **E.** Pour maximiser le nombre de points visibles à l'extérieur, on place, sur le cube $4\times4\times4$ …
… aux 8 « cubes-coins », les faces 6, 5 et 4 visibles,
… aux 12 fois 2 « cubes-arêtes », les faces 5 et 6 visibles,
… aux 6 fois 4 cubes au centre des 6 faces, la face 6 visible.
Le total visible sera : $(8\times15) + (24\times11) + (24\times6) = 120 + 264 + 144 = 528$.

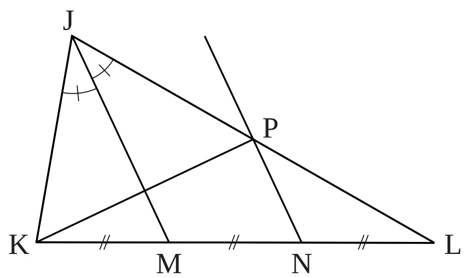
6. Réponse **D.** La somme des nombres étant 329 et la moyenne 47, il y a $329 \div 47$, soit 7 nombres dans la liste.
L'un étant 97, les 6 autres ont pour somme 232.
Pour que l'un d'entre eux soit le plus grand possible, il faut que les 5 autres soient les plus petits possibles, soit 1, 2, 3, 4 et 5.
Puisque $1+2+3+4+5=15$, le nombre cherché est $232-15$ soit 217.

7. Réponse **A.** La surface broutable comporte :
2 fois $\frac{1}{3}$ de disque de rayon 6 m, soit $\frac{72\pi}{3}$ m^2,
2 fois $\frac{1}{6}$ de disque de rayon 4 m , soit $\frac{16\pi}{3}$ m^2,
2 fois $\frac{1}{6}$ de disque de rayon 2 m, soit $\frac{4\pi}{3}$ m^2,
soit un total de $\frac{92\pi}{3}$ m^2.



8. Réponse **A.** On a $3^4+3^5+3^6=81+243+729=1053$ et 4^6 $(=2^{12}=4096)$ dépasse seul 2013. Donc $b\neq0$ et $a<4$.
Et, on a $2^6+2^7+2^8+2^9=64+128+256+512=960$ et 3^7 (égal à 2187) dépasse seul 2013. Donc $a\neq0$ et $b<3$.
Et donc b vaut 1 ou 2, et a vaut 1 ou 2 ou 3.
Si $b=1$, $a^4+a^5+a^6=2013-5=2008$; et $3^4+3^5+3^6$ n'est pas assez grand.
Si $b=2$, $a^4+a^5+a^6 = 2013-960=1053$ qui vaut justement $3^4+3^5+3^6$.
La seule combinaison qui convient est $a=3$ et $b=2$; et alors $a+b=5$.

9. Réponse **B.** Soit JKL un triangle tel que la bissectrice (JM) coupe [KL] en M avec KM = 1 et ML = 2.
Soit N le milieu de [ML]. La parallèle à (JM) passant par N coupe [JL] en son milieu P (droite des milieux dans le triangle JML). [KP] est ainsi une médiane du triangle JKL. (JM) coupe cette médiane en son milieu (droite des milieux dans le triangle KNP).
Pour construire un tel triangle JKL, on choisit arbitrairement l'angle $\widehat{J}$ et le point K ; puis on complète la figure avec P tel que JKP soit isocèle en J, et L tel que P soit le milieu de [JL]. Ci-contre, on a choisi $\widehat{KJP}=70°$ qui donne un triangle infirmant les réponses A, C et D (les deux autres angles étant d'environ 30° et 80°).

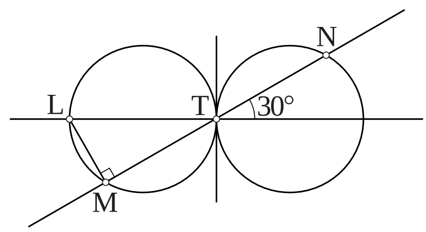


Subsidiaire. Réponse **464.** Voir Subsidiaire du sujet B.

Trophées Kangourou 2013 - Corrigé de l'épreuve Lycées

1. Réponse **D.** Si h est l'heure cherchée, on doit avoir : $h = \frac{(12-h)+(24-h)}{2}$. D'où $4h=36$ et $h=9$.

2. Réponse **B.** LMT est un triangle rectangle en M, d'angles aigus 30° et 60°.
C'est un demi-triangle équilatéral de côté [LT] avec LT = 2 ; son aire vaut donc : $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
L'aire du triangle LMN, dont (LT) est une médiane, est double de celle de LMT ;
elle est donc égale à $\sqrt{3}$.



3. Réponse **C.** Un joueur étant éliminé à chaque partie, le nombre de parties jouées est 31. Mais chaque partie est jouée par deux joueurs, ce qui fait 2×31 parties jouées en sommant les parties jouées par chacun des 32 joueurs.
La moyenne est donc de $\frac{2\times31}{32}$ parties par joueur, soit $\frac{31}{16}$.

4. Réponse **D.** Il y a 4 couleurs et 3 numéros. Il est donc plus probable de tirer 3 cartes de même numéro que 3 cartes de même couleur (les réponses A et E sont donc exclues) ; et il est donc plus probable de tirer 3 cartes de trois couleurs différentes que 3 cartes de numéros différents (réponse C exclue).

La probabilité de tirer 3 cartes de même numéro est $\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}$ (réponse B).

La probabilité de tirer 3 cartes de 3 couleurs différentes est $\frac{9}{11}\times\frac{6}{10}$ (réponse D) ; cette dernière est très supérieure à la précédente.

5. Réponse **A.** On a $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2$ donc $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$. De même : $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$.

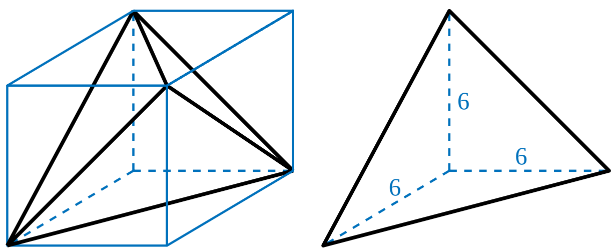
6. Réponse **D.** Soustrayons la première équation de la somme de la deuxième et de la troisième (en remarquant que $[x]+<x>=x$). Il reste : $2<y>+2[z]=1{,}4$ soit $[z]+<y>=0{,}7$. $[z]$, entier, ne peut donc valoir que 0 ; et $<y>=0{,}7$.

7. Réponse **D.** $3^{32}-2^{32}=(3^{16}-2^{16})(3^{16}+2^{16})=(3^8-2^8)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})$
$=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})$
$=5\times 13\times 97\times 6817\times(3^{16}+2^{16})$.
6817 est divisible par 17 puisqu'égal à $17+(4\times 17)\times 100$. $6817=17\times 401$.
Ainsi, parmi les cinq réponses proposées, seul 19 peut ne pas être un diviseur de $3^{32}-2^{32}$. C'est donc la bonne réponse !
On peut vérifier qu'effectivement 19 ne divise ni 401 (qui est premier) ni $3^{16}+2^{16}$.

8. Réponse **D.** Soient S_1, S_2, S_3 et S_4 les sommes partielles de chacun des 4 carrés 2×2.
Cherchons d'abord la plus grande valeur possible de leur somme $S_1+S_2+S_3+S_4$.
Pour cela, il faut placer les « grands » chiffres dans les cases qui interviennent dans plusieurs carrés 2×2. La case centrale intervient dans les 4 carrés 2×2 : on y place le 9. Les cases des milieux des côtés interviennent chacune dans 2 des carrés 2×2 : on y place 8, 7, 6 et 5. Les petits chiffres seront placés aux coins. Dans une telle disposition :
$S_1+S_2+S_3+S_4=(9\times 4)+(8+7+6+5)\times 2+(1+2+3+4)=98$.
$S_1+S_2+S_3+S_4$ ne peut donc pas dépasser 98 et la plus petite des sommes partielles ne dépasse pas le quart de 98 et donc ne dépasse pas 24. Voici un exemple (ci-contre à droite) où les quatre sommes sont 24, 24, 25 et 25.
Le nombre cherché est donc 24.

1	8	2
6	9	5
3	7	4

9. Réponse **D.** La figure montre comment un tétraèdre régulier s'inscrit dans un cube. Le côté de ce cube mesure la distance entre deux arêtes non adjacentes du tétraèdre, ici 6 dm.
Le volume de ce tétraèdre est le volume du cube (ici 36×6 dm^2) diminué des volumes de 4 tétraèdres situés en coin du cube.
Le volume de chacun de ces tétraèdres est $\frac{1}{3}\times\frac{6\times 6}{2}\times 6$, soit 36 dm^3.
Et celui du tétraèdre régulier initial est $(6-4)\times 36$, soit 72 dm^3.



Subsidiaire. Réponse **387.**
Sachant que $2^{10}=1024$ donc $2^{10}\approx 10^3$ et que $2^{19}\approx 3^{12}$ (car, puisque 12 quintes valent 7 octaves, on a $2^7\approx\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$),
on peut calculer, grossièrement, à la main : $1^1=1$
$100^{100}=10^{200}$
$200^{200}=2^{200}\times 100^{200}\approx\left(2^{10}\right)^{20}\times\left(10^2\right)^{200}\approx 10^{60}\times 10^{400}\approx 10^{460}$
$300^{300}=3^{300}\times 100^{300}\approx\left(3^{12}\right)^{25}\times 10^{600}\approx\left(2^{19}\right)^{25}\times 10^{600}\approx\left(2^{10}\right)^{47{,}5}\times 10^{600}$
$\approx 10^{142{,}5}\times 10^{600}\approx 10^{742{,}5}$
$400^{400}=2^{800}\times 100^{400}\approx 10^{240}\times 10^{800}\approx 10^{1040}$.
Un graphique rapide (avec les 4 valeurs 1, 100, 200, 300, 400) de la fonction $x\longmapsto z$ définie par $10^z=x^x$ montre que la relation entre x et z est quasi-linéaire.
On peut donc tenter une interpolation linéaire : dans l'intervalle [742,5 ; 1040], 1000 est $\frac{13}{100}$ (exactement $\frac{40}{297{,}5}$) en dessous de 1040. Alors, dans l'intervalle [300 ; 400], on peut prendre $\frac{13}{100}$ en dessous de 400, soit 387. Chanceux ?
Un calcul exact (en utilisant $z=x\log x$) donne $x=386{,}52\ldots$ si $x\log x=1000$.