KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

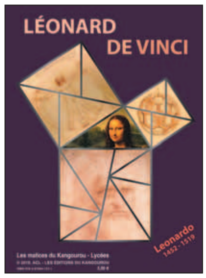
LES TROPHÉES KANGOUROU 2010

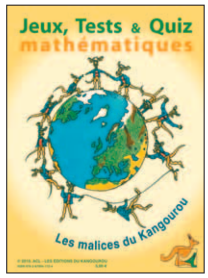
KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1991 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

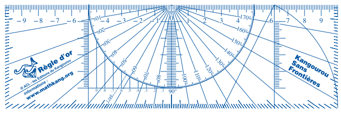
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, plus de trois cents mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 6 millions de participants dans 46 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.math-ksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !



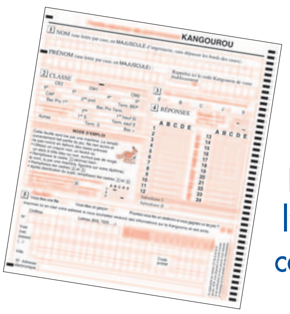




Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

De plus, cette année, les 18000 élèves ayant répondu juste aux 8 premières questions (faciles) ont reçu un livre (*45 bluffs logiques et amusants*).
Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !

Le Kangourou : un jeu ET un concours…



Chaque année, le Kangourou reste la grande fête des mathématiques, où l'on est heureux de participer, quelque soit son niveau, comme dans les grands marathons populaires.
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur cinq reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation au week-end parisien des *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).

Le Kangourou : des services Internet.

Le Kangourou a toujours utilisé les nouvelles technologies pour sa communication et ses productions. Aujourd'hui les possibilités d'Internet sont pleinement exploitées. En particulier :
- les inscriptions et leur suivi possibles sur internet,
- les résultats complets, avec édition électronique des diplômes,
- les annales complètes répertoriées, sélectionnables, et téléchargeables,
- des animations mathématiques devenues célèbres et utilisées dans les classes par de nombreux professeurs (Thalès, Pythagore, Archimède, …).

>>> Corrigés des épreuves des Trophées Kangourou >>>

1. Réponse **D.** 1871–1589 = (671+1200) – (389+1200) = 671–389. Et les autres sont du même acabit…
600–318 = (600–71) – (389–71) = 671–389 ; 771–489 = (671+100) – (389+100) = 671–389 ;
681–399 = (671+10) – (389+10) = 671–389 ; sauf 669–391 = (671–2) – (389+2).

2. Réponse **C.** Le cercle est divisé par les athlètes en 38 arcs égaux. 38÷2=19. L'athlète diamétralement opposé au numéro 8 porte le numéro 8 + 19, soit 27.

3. Réponse **B.** Un découpage-recollage judicieux permet de remplir le triangle TNL avec la queue du cerf-volant, coupée par l'axe de symétrie de la figure. L'aire grisée est égale à celle du demi-carré, soit 2.

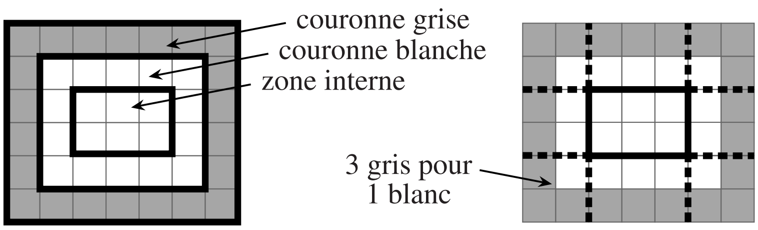
4. Réponse **C.** 6000 ÷ (30/100) = 20 000. 20 000 ÷ (20/100) = 100 000. 100 000 ÷ (10/100) = 1 000 000.

5. Réponse **B.** $\frac{13}{20}=\frac{2,6}{4}=\frac{7,8}{12}$. 13/20^{e} du trajet c'est donc entre 7/12^{e} et 8/12^{e}.
L'escargot a donc déjà parcouru les 7 premiers côtés du dodécagone et est en train de parcourir le 8^{e} .

6. Réponse **C.** Les années non bissextiles ont 365 jours. 365 = (52 × 7) + 1. Il y a donc 52 semaines et un jour dans une année non bissextile. Ce jour supplémentaire est le seul plus fréquent, c'est à la fois le premier et le dernier.
S'il y a plus de jeudis que de mardis, cela signifie que l'année a commencé un jeudi, et finit un jeudi. Et celle d'après commence un vendredi et finit un vendredi.

7. Réponse **D.** On cherche 5 nombres (le nombre de bonbons de chacun des 5 enfants).
Pour que la condition « tout groupe de 3 enfants a plus de bonbons que n'importe quel groupe de 2 enfants » soit vérifiée, il suffit que la somme des 2 plus grands ne dépasse pas la somme des 3 plus petits.
Pour que les 5 nombres soient tous différents et de somme la plus petite possible, il suffit que ces 5 nombres soient consécutifs.
Cherchons une solution avec 5 nombres consécutifs n, n+1, n+2, n+3 et n+4.
On aurait alors : $n+(n+1)+(n+2) > (n+3)+(n+4)$, c'est-à-dire $n > 4$.
Alors, avec les nombres 5, 6, 7, 8 et 9, toutes les conditions sont vérifiées.
D'où la réponse : 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35.

8. Réponse **D.** Découpons le rectangle blanc en une couronne blanche (de un carreau d'épaisseur) et une zone interne rectangulaire (voir figure).



La couronne grise a toujours 8 carrés de plus que la couronne blanche. En effet, chaque carré gris de la couronne grise jouxte un carré blanc de la couronne blanche sauf aux quatre coins, où il y a 3 gris pour un blanc, donc 2 gris de plus à chaque coin.
Si, au total, il y a autant de carrés blancs que de carrés gris, c'est que la zone interne contient exactement 8 carrés. Cela peut se faire de 2 façons (8 sur 1 ou 4 sur 2). Ce qui correspond à des rectangles de 12 sur 5 (d'aire 60 carreaux) et de 8 sur 6 (d'aire 48 carreaux). Recto est celui qui a une aire de 60 carreaux.

9. Réponse **C.** Au temps 0, naît 1 bactérie. À ½ h, une autre naît, il y en a alors 2. Ensuite, juste après chaque demi-heure, deux sortes de bactérie sont en vie :

- celles qui viennent de naître ; elles sont autant que celles qui leur ont donné naissance, c'est-à-dire celles qui vivaient une demi-heure avant.
- celles qui sont âgées d'une demi-heure ; nées une demi-heure avant, elles sont donc autant que celles qui vivaient une heure avant (d'après la remarque précédente).

On peut donc faire le tableau suivant, dans lequel la ligne du bas se remplit simplement en ajoutant les résultats des 2 cases précédentes.

Temps, en ½ h :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bactéries vivantes :	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Les nombres obtenus sont ceux de la classique suite de Fibonacci.

Subsidiaire. Réponse **57,295779513082320876798…**
Si R est le rayon en mm, on a $2\pi R = 360$, donc R=180/π.
$\frac{180}{3,14}=57,3\ldots$ $\frac{180}{3,1416}=57,2956\ldots$ $\frac{180}{3,141592}=57,29579\ldots$ $\frac{180}{3,1415926535}=57,295779514\ldots$

Trophées Kangourou 2010 - Corrigé de l'épreuve Cadets

1. Réponse **A.** Dans la descente, il y a eu deux haltes et une remontée pour rechercher les lunettes.

2. Réponse **B.** En posant la division et en la commençant, on trouve que le premier chiffre est un 9.
Si $Q = 10111101/111$, alors $Q \times 111 = 10111101$; le quotient doit donc se terminer par 1.
Seule la réponse B peut convenir (et on peut le vérifier en poursuivant la division).

3. Réponse **B.** X, O et K sont alignés puisque le triangle XYK est rectangle en Y.
Si XY est égal au rayon du cercle, le triangle XOY est équilatéral et $\widehat{\mathrm{OXY}} = \widehat{\mathrm{KXY}} = 60°$. D'où $\widehat{\mathrm{XKY}} = 30°$.

4. Réponse **D.** Pour obtenir 1 comme résultat, il faudra faire $2-1$ ou bien $2 \times 0 + 1$.
Pour $2-1$, le deuxième cœur est un signe « – », les autres cœurs sont soit « + » soit « – » ; cela fait 4 manières.
Pour $2 \times 0 + 1$, le troisième cœur est soit « + » soit « – » ; cela fait 2 autres manières.
Au total, il y a donc 6 façons d'obtenir 1 comme résultat.

5. Réponse **E.** Commençant par 9, il y a : 1 nombre entre 0 et 9, 10 nombres entre 10 et 99, 100 nombres entre 100 et 999, 1 000 nombres entre 1 000 et 9 999 et 10 000 nombres entre 10 000 et 100 000.
Soit au total : 11 111 nombres.

6. Réponse **A.** Le tiers de la longueur est 4 m ; le tiers de la largeur est 3 m ; l'hypoténuse des triangles rectangles de côtés 3 et 4 mesure 5 (c'est un cas bien connu du théorème de Pythagore).
Le périmètre vaut donc, en mètres, $(4 \times 2) + (3 \times 2) + (5 \times 4)$, soit 34.

7. Réponse **B.** On réécrit les fractions sous la forme de différences : $s = 1 - \dfrac{1}{1111}$, $t = 1 - \dfrac{2}{2223}$, $u = 1 - \dfrac{3}{3334}$.
Avec un même numérateur : $s = 1 - \dfrac{6}{6666}$, $t = 1 - \dfrac{6}{6669}$, $u = 1 - \dfrac{6}{6668}$.
Or : $\dfrac{6}{6666} > \dfrac{6}{6668} > \dfrac{6}{6669}$; d'où $1 - \dfrac{6}{6666} < 1 - \dfrac{6}{6668} < 1 - \dfrac{6}{6669}$. Et $s < u < t$.

8. Réponse **B.** Pour parcourir la distance d à la vitesse v, la famille Kangourou a mis le temps T.
Pour parcourir la même distance d, à 1,25 v, la famille Kangourou aurait mis le temps $T - 1{,}5$ (en prenant l'heure pour unité).
On a donc : $vT = 1{,}25\,v\,(T - 1{,}5)$. Soit $0{,}25\,T = 1{,}25 \times 1{,}5$. Et $T = 7{,}5$.
7,5 heures avant 16 h, c'est 8,5 h ou 8 h 30.

9. Réponse **D.** Remarquons que $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, multiple de 3.
Si on choisit 7 nombres dont la somme est multiple de 3, la somme des deux restants est aussi multiple de 3 (et réciproquement). Il faut donc choisir 2 nombres dont la somme est multiple de 3, ce qui peut se faire de 12 façons différentes :
1+2, 1+5, 1+8, 2+4, 2+7, 3+6, 3+9, 4+5, 4+8, 5+7, 6+9 et 7+8.

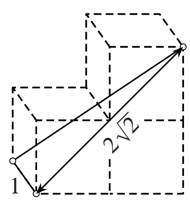
Subsidiaire. Réponse **2,236067977499789…**
$2{,}2 \times 2{,}2 = 4{,}84$ et $2{,}3 \times 2{,}3 = 5{,}29$.
On peut essayer $2{,}25 \times 2{,}25 = 5{,}0625$; puis $2{,}23 \times 2{,}23 = 4{,}9729$.
Pour une troisième décimale, on peut continuer les essais ou bien parier sur une « interpolation linéaire » …

4,97 + 0,00 = 4,97	4,97 + 0 ,03 = 5	4,97 + 0,09 = 5,06
0	1	3
2,23 + 0,00 = 2,23	2,23 + 0,006…	2,23 + 0,02 = 2,25

Trophées Kangourou 2010 - Corrigé de l'épreuve Juniors

1. Réponse **B.** Pour que $\dfrac{n}{10-n}$ soit entier, il faut : $10 - n \leqslant n$ soit $n \geqslant 5$. Pour qu'il soit positif, il faut : $10 - n \geqslant 0$, soit $n \leqslant 10$.
Les essais (avec 5, 6, 7, 8 et 9) donnent 3 valeurs possibles pour n : 5, 8 et 9.

2. Réponse **B.** La grande diagonale de la face de devant vaut $2\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 2).
La distance demandée est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 1 et $2\sqrt{2}$, soit 3.



3. Réponse **A.** Arthur obtient les sommes 17, 18 et 19 de façon équiprobable.
Agatha obtient les produits 15, 18 et 30 de façon équiprobable.
Parmi les 9 possibilités, il y en a 4 où Arthur dépasse Agatha : (17 ; 15), (18 ; 15), (19 ; 15) et (19 ; 18).

4. Réponse **C.** La bouteille se remplit lentement au début (la bouteille est large), puis vite (elle se rétrécit), puis de moins en moins vite (elle redevient large) puis de façon linéaire (c'est la place du bouchon, qui est cylindrique).
Seule la bouteille C, d'abord large, se rétrécit puis s'élargit.

5. Réponse **E.** Prenons le rayon du cylindre pour unité et appelons h la hauteur des verres. Le volume du cylindre est πh.
Le cône, s'il était complet, aurait une hauteur de $2h$ et un volume de $\frac{2\pi h}{3}$; la pointe du cône ayant pour volume $\frac{1}{3}\times\frac{\pi h}{4}$, soit $\frac{\pi h}{12}$.
Le verre tronconique a donc pour volume : $\frac{2\pi h}{3}-\frac{\pi h}{12}=\frac{7\pi h}{12}$. Le rapport des volumes est $\frac{12}{7}$.

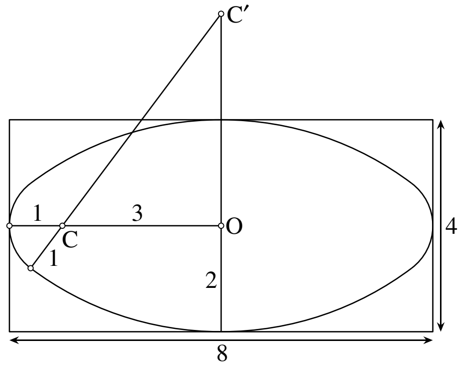
6. Réponse **A.** On calcule les premiers termes de la suite : 1 ; 2 ; 3; 0 ; 5 ; −2 ; 7 ; −4 ; 9 ; −6 ; …
On constate que la suite des termes de rang impair est la suite des nombres impairs ; et que la suite des termes de rang pair est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison −2.
Le 1005^e^ élément de la suite des termes de rang pair est donc : $2+(-2)\times 1004=-2006$. Et c'est le 2010^e^ élément cherché.
Démonstration : notons U_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite, on a $U_{n+3}=U_{n+1}+U_n-U_{n+2}$ d'où $U_{n+3}-U_{n+1}=U_n-U_{n+2}$
$U_{n+4}=U_{n+2}+U_{n+1}-U_{n+3}$ d'où $U_{n+4}-U_{n+2}=U_{n+1}-U_{n+3}$.
Donc $U_{n+4}-U_{n+2}=U_{n+2}-U_n$. La différence de deux termes de même parité est donc constante. Ces termes forment donc une suite arithmétique dont la raison est fixée par les deux premiers.

7. Réponse **C.** Soit x le côté du polygone régulier à 16 côtés obtenu. Le côté du carré (qui vaut 1) vaut aussi $x+\sqrt{2}x+x$.
Donc $x=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. L'aire cherchée vaut : $1+2\times\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2=1+\frac{1}{2}\times(4+2-4\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}$.

8. Réponse **D.** Voici une liste ci-contre (nous les avons écrites en ligne selon la valeur du terme le plus grand et, dans chaque somme, nous n'avons pas écrit les signes « + »). Cela fait 22 partitions.

- 11111111
- 2111111 221111 22211 2222
- 311111 32111 3221 3311 332
- 41111 4211 422 431 44
- 5111 521 53
- 611 62
- 71
- 8.

9. Réponse **A.** Soit C le centre du petit arc de cercle (de gauche) et C′ le centre du grand arc de cercle (du bas). Soit O le centre du rectangle et soit R le rayon cherché.
On a $OC=3$; $OC'=R-2$ et $CC'=R-1$ (puisque C et C′ sont tous deux situés sur la normale à leur tangente commune).
Le triangle OCC′ est rectangle en O. Le théorème de Pythagore y donne :
$(R-2)^2+3^2=(R-1)^2$. D'où $2R=12$ et $R=6$.
(Le triangle OCC′ est donc un triangle « 3,4,5 ».)



Subsidiaire. Réponse **1507.**
Pour trouver un ensemble E maximal, on va découper l'ensemble {1 , 2 , 3 , … , 2010} en morceaux et on va prendre un nombre maximal d'éléments dans chaque morceau. Pour chaque a non multiple de 3, soit Ea l'ensemble formé des éléments de {a , 3a , 9a , 27a , 81a , 243a , 729a} qui sont inférieurs à 2010.
(Notez que, parmi les entiers de 1 à 2010, il y a : 670 multiples de 3 ; 223 multiples de 9 ; 74 multiples de 27 ;
24 multiples de 81 ; 8 multiples de 243 et 2 multiples de 729.)
Les 1340 ensembles Ea forment une partition de {1 , 2 , 3 , … , 2010}. L'ensemble E ne peut pas contenir 2 éléments consécutifs de chaque Ea. Un plus grand ensemble E peut s'obtenir en prenant…
• tous les non multiples de 3 : il y en a 1340 ;
• tous les multiples de 9 non multiples de 27 : il y en a 149 (223 − 74) ;
• tous les multiples de 81 non multiples de 243 : il y en a 16 (24 − 8) ;
• tous les multiples de 729 : il y en a 2.
Au total : 1340 + 149 + 16 + 2 = 1507.