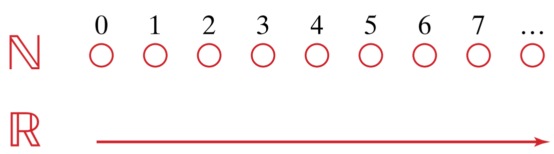
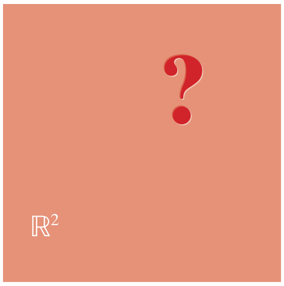
# La puissance du continu

Qu'il y ait une différence de **puissance** entre le **dénombrable** et le **continu** se conçoit finalement assez bien.




C'est l'éternelle distinction entre le continu et le discret, entre le tas de grains bien séparés les uns des autres et l'espace indéfiniment sécable, entre l'alignement bien ordonné d'unités distinctes et la ligne parfaitement homogène sans discontinuité.

Que dire alors d'une surface et de tous les points qui la composent ?

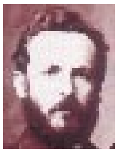



Il semble *manifeste* qu'une entité à deux dimensions doit avoir "beaucoup plus" de points qu'une entité à une dimension.

**La puissance d'un continu à deux dimensions est-elle supérieure à la puissance d'un continu à une dimension ?**

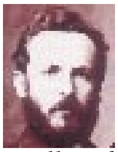
C'est la question que s'est justement posée **Georg Cantor** dans les années 1870. Il correspondait alors régulièrement avec son ami **Richard Dedekind** de quatorze ans son ainé. Voici un bref résumé de leur hallucinant échange de lettres qui débuta le 29 novembre 1873.

Les deux hommes établissent d'abord, comme nous l'avons montré, qu'il ne peut exister de bijection entre l'ensemble ℕ des nombres entiers et l'ensemble ℝ des nombres réels (ou des points d'une droite). C'est le 5 janvier 1874 que Cantor pose le problème qui va ébranler toutes les mathématiques avant qu'elles ne deviennent "modernes" :



*"À propos des questions qui m'ont occupé ces derniers temps, je m'aperçois que, dans cet ordre d'idées, se présente aussi la suivante : est-ce qu'une surface (par exemple un carré, frontière comprise) peut être mis en relation univoque (en bijection) avec une courbe (par exemple un segment de droite, extrémités comprises), de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde un point de la courbe, et réciproquement à tout point de la courbe un point de la surface ?".*

Le 20 juin 1877, Cantor adresse à Dedekind une démonstration de ce troublant résultat : il existe une bijection entre le côté d'un carré et l'intérieur de carré, c'est-à-dire entre un objet de dimension 1 et un objet de dimension 2. Le 25 juin, Georg Cantor lui envoie une nouvelle démonstration. N'ayant pas de réponse immédiate, il écrit alors le 29 juin ces phrases tant citées :



*"Ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi si inattendu, si nouveau, que je ne pourrai pour ainsi dire pas arriver à une certaine tranquillité d'esprit avant que je n'aie reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : **je le vois, mais je ne le crois pas !**".*

Le 2 juillet 1877, Dedekind répond enfin :

*Cher ami, je suis entièrement convaincu par votre démonstration.*

Voici une réécriture de cette démonstration, rendue aujourd'hui assez simple pour être comprise pour tous et fondée sur deux idées élémentaires :

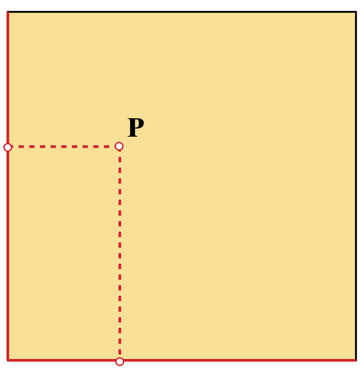
- un nombre est bien défini par son développement décimal illimité.
- si un point d'un segment est bien défini par la donnée d'un nombre (son "abscisse"), alors un point d'une surface est bien défini par la donnée de deux nombres (ses "coordonnées").

Précisément, le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

**THÉORÈME. L'ensemble des points d'un carré peut être mis en bijection avec l'ensemble des points d'un segment (un de ses côtés par exemple).**

Imaginons le segment comme l'ensemble des points d'abscisses comprises entre 0 et 1.

Et imaginons le carré comme l'ensemble des points de coordonnées (abscisses et ordonnées) comprises entre 0 et 1.



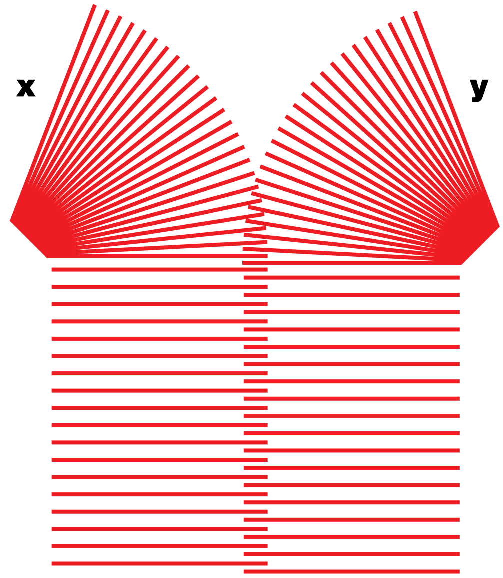

Imaginons alors que les chiffres de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point P du carré soient écrits sur des cartes à jouer.

Comme ceci :

**x =** 0 , 3 2 2 5 4 ... ... ...

**y =** 0 , 6 1 0 4 6 ... ... ...

On a alors devant nous 2 paquets de cartes : l'un permet de retrouver l'abscisse de P, l'autre son ordonnée.

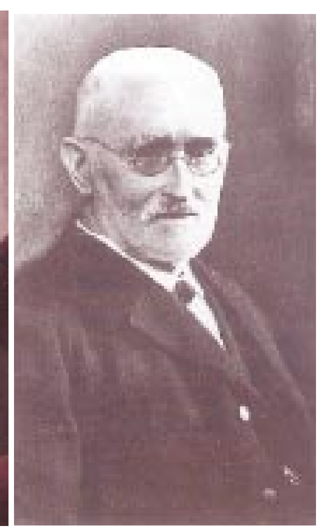



Arrive alors un prestidigitateur, grand manipulateur de cartes qui sait les mélanger d'une manière parfaite. Tenant chaque paquet entre le pouce et l'index, il les libère l'une après l'autre de façon alternée : une carte d'un paquet, puis une carte de l'autre paquet et ainsi de suite.

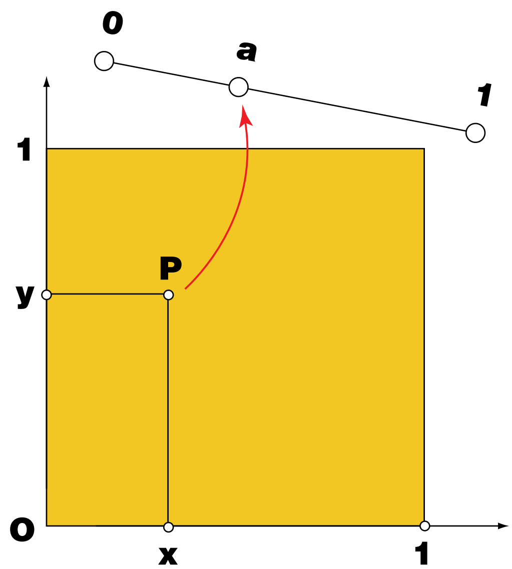
Il se retrouve alors avec un seul paquet sur lequel on lit successivement les chiffres :

**a =** 0 , 3 6 2 1 2 0 5

C'est le développement décimal illimité d'un nombre *a* que l'on peut prendre pour abscisse d'un point sur le segment [0, 1].



La voilà notre correspondance entre un point du carré et un point du segment : l'imbrication des chiffres des abscisses et des ordonnées de P pour ne donner qu'un seul nombre : l'abscisse d'un point sur un segment.




Car il s'agit bien d'une bijection ; en effet, à l'inverse, à partir de l'abscisse d'un point du segment, par exemple

0,1263104579…

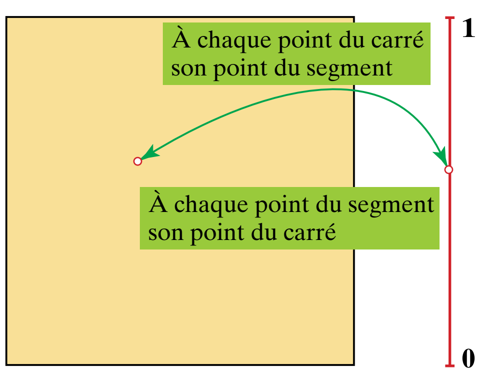
on obtient l'abscisse d'un point du carré en en prenant les chiffres d'ordre impair :

0,1 6 1 4 7…

et l'ordonnée de ce point en prenant les chiffres d'ordre pair :

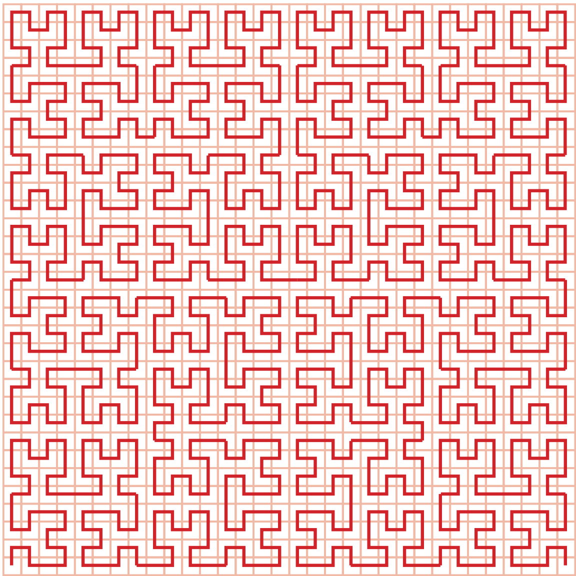
0,2 3 0 5 9…

C.Q.F.D. !




Pour être juste avec l'histoire, c'est le mathématicien italien **Péano** qui mit au point ce type de démonstration à la fin du siècle dernier en essayant de faire encore mieux : définir une courbe qui remplisse réellement tout le carré ! Il y a justement réussi.

La courbe suggérée ci-dessous en donne une idée ; elle définit une bijection entre le carré et une ligne très intéressante : deux points proches dans le carré correspondent à des points proches sur la ligne.



**Ainsi on ne peut pas faire la distinction entre une courbe et une surface du simple point de vue du comptage des points.**

Dans le même ordre d'idée, il y a aussi “autant” de points dans l'espace que sur une simple droite !

C'est donc ailleurs qu'il faut chercher la notion de **dimension**, comme on le comprendra au XX$^{e}$ siècle.

Quand à Cantor, il finit ses jours dans une bien triste détresse morale qui lui fit abandonner les mathématiques prématurément.

C'est à lui cependant que l'on doit aussi la très belle situation qui suit, interprétée excusez-nous en, en “termes modernes”…