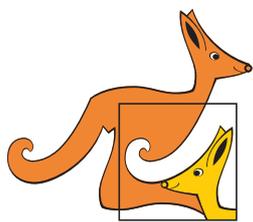


KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

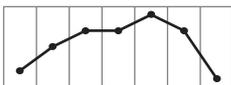
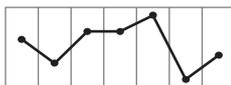
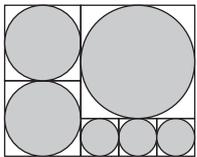


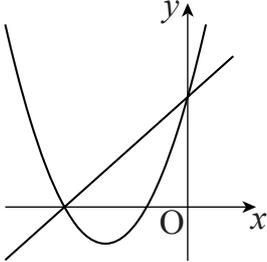
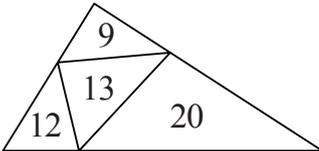
L'association *Kangourou Sans Frontières* organise le jeu-concours *Kangourou* pour plus de six millions de participants dans le monde.

Jeu-concours 2021 — Durée : 50 minutes

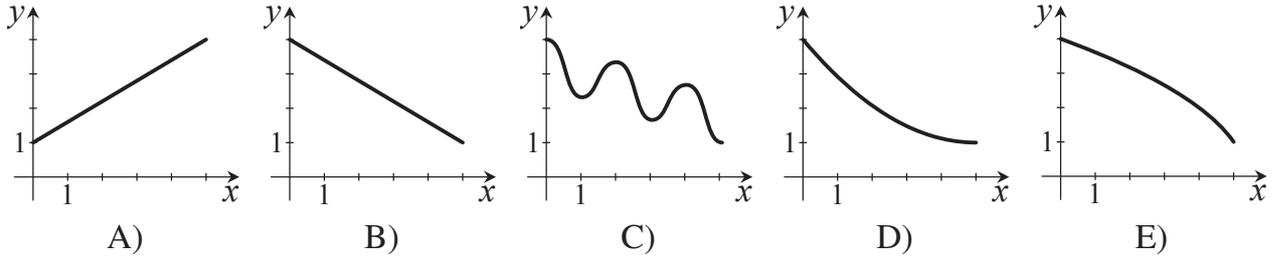
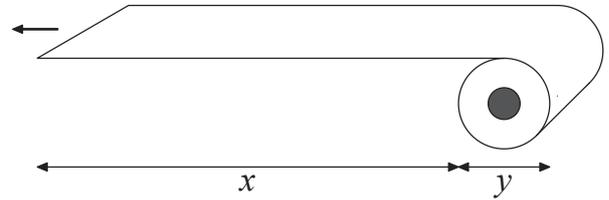
Sujet S

- L'épreuve est individuelle. **Les calculatrices sont interdites.**
 - **Il y a une seule bonne réponse par question.** Les bonnes réponses rapportent 3, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n'est donnée, la question rapporte 0 point.
 - Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (au nombre de réponses justes depuis la première question jusqu'à la première réponse erronée).
- Les classements sont séparés par niveau : 1^{ère} (spéc. math.), T^{ale} (spéc. math.), Étudiants (Bac+).**

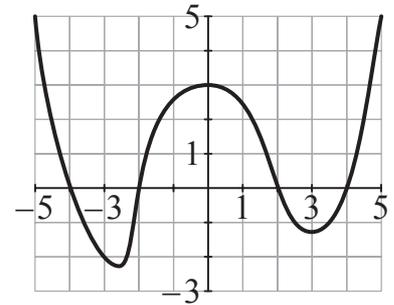
- 1** Lequel de ces nombres est le plus proche de $\sqrt{2021}$?
A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55
- 2** Un cube d'arête 1 cm est découpé en deux pavés droits identiques. Quelle est l'aire totale, en cm^2 , d'un de ces pavés ?
A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 6
- 3** Voici les températures maximales prévues pour les 7 jours à venir : -1° ; -4° ; 0° ; 0° ; 3° ; -3° ; -5° (chronologiquement). Quelle est la représentation graphique associée ?
- A)  B)  C)  D)  E) 
- 4** La figure montre un rectangle divisé en six carrés. Un cercle grisé est inscrit dans chacun des carrés. Quelle proportion de l'aire du rectangle est grisée ?
- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{3}{\pi}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$
- 

- 7** Soit $x = \frac{\pi}{4}$. Quel est le nombre le plus grand parmi les propositions ci-dessous ?
 A) x^4 B) x^3 C) x^2 D) x E) \sqrt{x}
- 8** Entre 100 et 999, combien y a-t-il de nombres divisibles par 3 et comportant seulement les chiffres 1, 3 ou 5 (éventuellement utilisés plusieurs fois) ?
 A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27
- 9** Les sommets d'un triangle ont pour coordonnées (p, q) , $(3p, q)$ et $(2p, 3q)$ dans un repère orthonormé (p et q étant des nombres strictement positifs). Quelle est l'aire de ce triangle ?
 A) $\frac{pq}{2}$ B) pq C) $2pq$ D) $3pq$ E) $4pq$
- 10** La figure représente une droite et une parabole dans un repère orthonormé. La parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont 3 nombres réels distincts. Laquelle des équations suivantes peut-elle être celle de la droite ?
 A) $y = bx + c$ B) $y = cx + b$ C) $y = ax + b$
 D) $y = ax + c$ E) $y = cx + a$
- 
- 11** Une feuille de papier a pour longueur x et pour largeur y ($x > y$). Elle peut être roulée, bord à bord pour former un cylindre, de deux façons différentes. Quel est le quotient du volume du cylindre de plus grande hauteur par le volume du cylindre de plus petite hauteur ?
 A) $\frac{y^2}{x^2}$ B) $\frac{y}{x}$ C) 1 D) $\frac{x}{y}$ E) $\frac{x^2}{y^2}$
- 12** Combien d'entiers naturels à 3 chiffres ont la particularité suivante : le nombre obtenu en inversant l'ordre des chiffres vaut 99 de plus que le nombre d'origine ?
 A) 8 B) 64 C) 72 D) 80 E) 81
- 13** On note $p(N)$ le produit des chiffres d'un entier positif N . Par exemple : $p(23) = 2 \times 3 = 6$. Combien vaut la somme des 91 termes $p(10) + p(11) + p(12) + \dots + p(99) + p(100)$?
 A) 2025 B) 4500 C) 5005 D) 5050 E) aucune des quatre réponses précédentes
- 14** Un grand triangle est divisé en triangles plus petits (voir figure). À l'intérieur de chaque petit triangle est écrit son périmètre (en m). Quel est le périmètre du grand triangle ?
 A) 28 m B) 32 m C) 34 m D) 41 m E) 54 m
- 
- 15** f est une fonction définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout (x, y) , $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(1) = 2$. Combien vaut $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$?
 A) 4040 B) 2020 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

16 Un chat farceur déroule un rouleau de papier toilette en s'éloignant à vitesse constante. Lequel des graphiques ci-dessous représente-t-il le mieux la fonction qui, à la longueur de papier déroulé associe le diamètre restant du rouleau ?



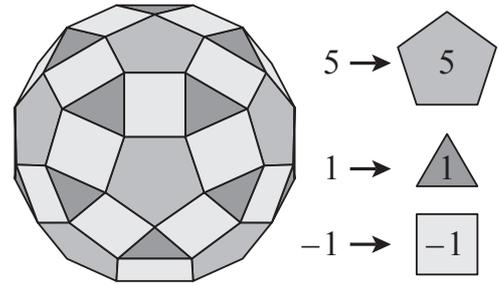
17 La figure montre la représentation graphique de la fonction $f : [-5 ; 5] \rightarrow \mathbb{R}$.



Combien de solutions a l'équation $f(f(x)) = 0$?

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 7
- E) 8

18 Le polyèdre ci-contre comporte 12 faces qui sont des pentagones réguliers ; les autres faces sont des carrés ou des triangles équilatéraux. Chaque pentagone est bordé de 5 carrés et chaque triangle est bordé de 3 carrés. Toutes les faces triangulaires portent le nombre 1, toutes les faces pentagonales portent le nombre 5 et toutes les faces carrées portent le nombre -1.



Combien vaut la somme de tous les nombres écrits sur les faces de ce polyèdre ?

- A) 40
- B) 50
- C) 60
- D) 80
- E) 120

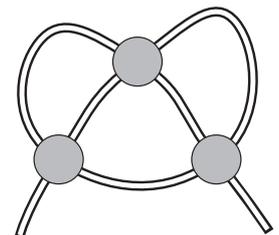
19 Dans le carré 5×5 ci-contre, la somme des nombres de chaque ligne et de chaque colonne est la même. Il y a un nombre dans chaque case mais certains sont invisibles.

| | | | |
|----|----|----|---|
| | 16 | 22 | |
| 20 | | 21 | 2 |
| | 25 | | 1 |
| 24 | | 5 | 6 |
| | 4 | ? | |

Quel nombre figure à la place du point d'interrogation ?

- A) 8
- B) 10
- C) 12
- D) 18
- E) 23

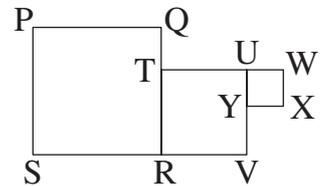
20 Une ficelle est posée sur la table. Les croisements sont cachés par des jetons (voir figure). Sous chaque jeton, les brins peuvent se croiser de deux façons équiprobables, \times ou \times .



Quelle est la probabilité qu'un nœud se forme en tirant sur les deux extrémités de la ficelle ?

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $\frac{1}{8}$
- D) $\frac{3}{4}$
- E) $\frac{3}{8}$

- 21** La figure montre 3 carrés PQRS, TRVU et UWXY placés côte à côte et tels que les points P, T et X sont alignés. L'aire de PQRS est 36 et l'aire de TRVU est 16. Quelle est l'aire du triangle PVX ?

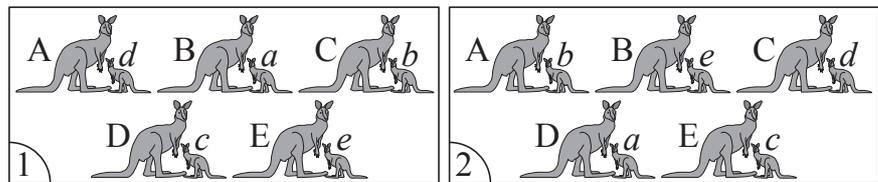


- A) $\frac{44}{3}$ B) $\frac{46}{3}$ C) 16 D) $\frac{53}{3}$ E) 18

- 22** Les nombres 1, 2, 7, 9, 10, 15 et 19 sont écrits au tableau. Chacun à son tour, Alice et Bob effacent un nombre jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un seul. La somme des nombres effacés par Alice est le double de la somme de ceux effacés par Bob. Quel nombre est resté écrit ?

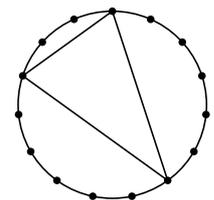
- A) 7 B) 9 C) 10 D) 15 E) 19

- 23** a, b, c, d et e sont les petits des mamans A, B, C, D et E, chaque maman ayant un petit.



- Sur la première image, il y a exactement deux petits à côté de leur maman. Sur la deuxième image, il y a exactement trois petits à côté de leur maman. Qui est la maman de a ?
- A) A B) B C) C D) D E) E

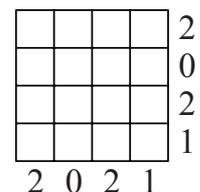
- 24** On a placé 15 points régulièrement espacés sur un cercle. En joignant trois de ces points, on forme un triangle. Deux triangles sont considérés comme différents s'ils ne sont pas images l'un de l'autre dans une symétrie ou une rotation. Combien peut-on tracer de triangles différents dans ce cercle ?



- A) 19 B) 91 C) 46 D) 455 E) 23

Pour départager d'éventuels premiers *ex aequo*, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

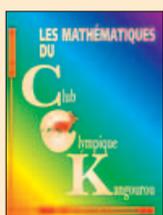
- 25** Certaines cases de la grille 4×4 ci-contre doivent être noircies en respectant cette règle : les nombres écrits en bout de ligne ou de colonne indiquent le nombre de cases noires de la ligne ou de la colonne. Combien de grilles différentes peut-on obtenir ?



- 26** Combien de couples (x, y) d'entiers positifs non nuls vérifient l'équation $xy^2 + 2y^2 - x - 107 = 0$?

© Art Culture Lecture - les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 4 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé.
« Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »



Kangourou des mathématiques, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet

<http://www.mathkang.org/catalogue/>

Des livres pour faire, comprendre et aimer les mathématiques

