KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant (hors années de pandémie) et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 80 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques, qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2021 - Corrigé du sujet « J »

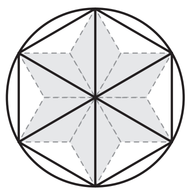
1. Réponse **D.** $\dfrac{20\times21}{2+0+2+1}=\dfrac{4\times5\times21}{5}=84.$

2. Réponse **B.** Seule la représentation B montre une décroissance, puis une croissance, puis une décroissance à la fin.

3. Réponse **C.** Deux semaines complètes font 14 jours, donc le 3^{e} jeudi d'un mois ne peut pas être avant le 15 du mois. La date C n'est donc pas un *jour du Kangourou* (et l'on peut vérifier que les autres correspondent bien à des troisièmes jeudis de mars).

4. Réponse **B.** Pour les trois chemins, la somme des longueurs non horizontales est la même, égale à un côté du triangle. L'ordre des longueurs est donc déterminé par la somme des longueurs des segments horizontaux. Par comparaison, on a : $P < R < Q$.

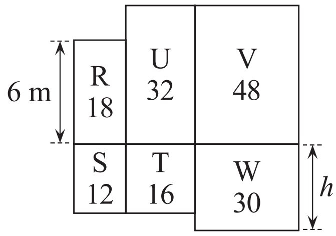
5. Réponse **C.** La longueur de la grande diagonale d'un losange est égale au côté de l'hexagone (voir ci-contre la figure classique de l'hexagone inscrit dans un cercle et découpé en six triangles équilatéraux). Ainsi, en accolant deux triangles blancs par leurs grands côtés, on forme un losange identique aux autres. L'aire des 6 triangles blancs est donc 3×5, soit 15 cm^2. Et l'aire de l'hexagone est $15+(6\times5)$, soit 45 cm^2.



6. Réponse **C.** Soit x l'âge de la bassiste. On a (somme des âges des 6 membres) : $3x+19+20+21=21\times6$. D'où $3x-3=21\times3$ et $x=22$.

7. Réponse **E.** C'est E qui montre le symétrique. (Pour exclure A, B, C et D, on peut remarquer que la barre du bas du L doit rester du côté du O et que le S devient Ƨ.)

8. Réponse **B.** Les rectangles étant nommés comme ci-contre, on calcule successivement, en mètres, les dimensions :



largeur de R, $18 \div 6$, soit 3 ;
longueur de S, $12 \div 3$, soit 4 ;
côté de T, $16 \div 4$, soit 4 ;
longueur de U, $32 \div 4$, soit 8 ; largeur de V, $48 \div 8$, soit 6.
Et, finalement, $h = 30 \div 6$, soit 5.

9. Réponse **B.** x étant le nombre de buts marqués après la mi-temps par l'équipe adverse, on a $14 + x + 1 = 9 + 2x$. D'où $x = 6$.
Le résultat final est donc 21 à 20.

10. Réponse **C.** Le carré grisé a pour côté 3 m. Sachant que le demi-périmètre du grand rectangle est 15 m, on a $(3 + \text{KL}) + (3 + \text{KN}) = 15$. D'où $\text{KL} + \text{KN} = 9$. Et le périmètre de KLMN est 2×9, soit 18 (en m).

11. Réponse **C.** On cherche n tel que $n - \dfrac{1}{10} = \dfrac{n}{10}$. Et donc $n = \dfrac{1}{9}$.

12. Réponse **D.** Un seul des deux premiers triangles est isocèle, les deux sont rectangles et leurs aires sont 10 et 8 (en carreaux).
Le troisième triangle doit donc être isocèle non-rectangle et d'aire 10 ou 8. Parmi les triangles proposés, seuls C et D sont isocèles, et l'aire de D est 8 (alors que celle de C est 12).

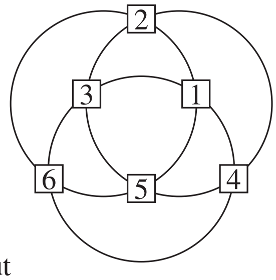
13. Réponse **A.** Pour avoir le moins de chiffres possible, il faut que le nombre N ait le plus possible de 9. Comme $2021 = (9 \times 224) + 5$, $N = 5999\ldots999$ (où 9 est écrit 224 fois).
Alors $N + 2021$, égal à $(N + 1) + 2020$, s'écrit $600\ldots002020$ (avec uniquement des zéros à la place des points). La somme des chiffres de $N + 2021$ est donc $6 + 2 + 2$, soit 10.

14. Réponse **C.** Comme Yves doit éviter la 6^{e} marche, il doit passer par la 5^{e}, aller alors sur la 7^{e} et terminer sur la 8^{e}. Le nombre de manières d'arriver à la 8^{e} marche est donc le même que pour la 5^{e} marche. On peut compter par exemple :
- une marche par une marche : 1 possibilité ;
- une seule fois 2 marches à la fois : 4 possibilités ;
- deux fois 2 marches à la fois : 3 possibilités (1+2+2, 2+1+2, 2+2+1).

Au total, cela fait 1+4+3, soit 8 manières différentes de monter.
Remarque. On peut aussi y reconnaître la suite de Fibonacci : 1 manière de monter jusqu'à la 1re marche, 2 manières (1+1 marche ou 2 marches d'un coup) pour atteindre la 2^{e} marche. Et à partir de là, à chaque marche, on ajoute les nombres des deux précédentes marches. 1+2=3 (3^{e} marche). 2+3=5 (4^{e} marche). 3+5=8 (5^{e} marche).

15. Réponse **E.** La voiture II a dû dépasser les III, IV et V.
La voiture IV a dû dépasser la V.
La voiture I a dû dépasser les III et V.
Il y a donc eu au moins 3+1+2 soit 6 dépassements.
Et les dépassements peuvent effectivement se faire dans l'ordre que nous avons écrit. Le plus petit total possible de points donnés est 6.

16. Réponse **A.** La somme des entiers de 1 à 6 vaut 21. Soit S la somme sur un même cercle. On a $3S = 2 \times 21 = 42$ (car chaque nombre est compté 2 fois si on ajoute les nombres sur chacun des trois cercles). D'où $S = 14$.
Sur les deux cercles contenant le 6, la somme des 3 autres nombres vaut donc 8, qui ne peut s'obtenir que de deux manières : ou $8 = 5 + 2 + 1$ ou $8 = 4 + 3 + 1$.
Et c'est donc 1 qui se trouve sur la 2^{e} intersection de ces deux cercles.
Le dessin montre un des placements possibles pour les six nombres.



17. Réponse **D.** Soit N un des entiers considérés. $N–5$ étant multiple de 6, 7, 8 et 9, il est multiple de leur plus petit multiple commun, qui est $9 \times 8 \times 7$, soit 504. Avec $0 \leqslant N < 2021$, N peut donc valoir :
5 ; $504 + 5 = 509$; $2 \times 504 + 5 = 1013$; $3 \times 504 + 5 = 1517$.
Cela fait 4 entiers possibles.

18. Réponse **E.** Avec les nombres donnés, les 4 groupes réunis doivent être 1 groupe de mâles et 3 de femelles. Et s'il y a 3 fois plus de femelles que de mâles, c'est que les mâles représentent un quart du total.
Examinons les possibilités dans un tableau :

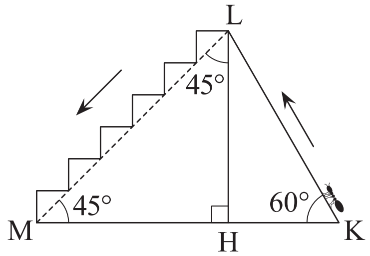
Groupe écarté	Total kangourous réunis	Quart du total des réunis
celui de 9	81 – 9 = 72	18
celui de 15	81 – 15 = 66	impossible
celui de 17	81 – 17 = 64	16
celui de 19	81 – 19 = 62	impossible
celui de 21	81 – 21 = 60	15

Dans la dernière colonne, seul 15 est l'effectif d'un groupe. Donc le groupe écarté est celui de 21 kangourous.

19. Réponse **E.** Les nombres dans les cases sont successivement 2021, S–2021, 2022, S–2022, 2023, S–2023, 2024, et dans la huitième case, S–2024. Donc $S-2024=2021$ et $S=4045$.

20. Réponse **D.** Comme $x+y+z=0$, on a $x+y=-z$, $y+z=-x$ et $x+z=-y$. D'où $(x+y)(y+z)(x+z)=-zxy=-78$.
Remarque. On peut choisir tout réel non nul pour x, les deux autres nombres étant alors $\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2-\frac{312}{x}}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(-x-\sqrt{x^2-\frac{312}{x}}\right)$.
Voici deux exemples :
$x=8, y=-\frac{3}{2}, z=-\frac{13}{2}$ et $x=3\sqrt[3]{13}, y=-\sqrt[3]{13}, z=-2\sqrt[3]{13}$.

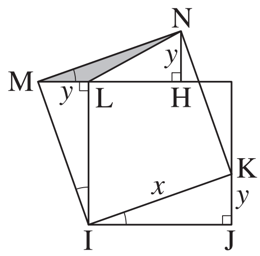
21. Réponse **E.** L'angle $\widehat{\text{LMK}}$ mesure $180°-60°-75°$, soit $45°$. Soit H le pied de la hauteur issue de L. Le triangle HLM est isocèle rectangle, donc HM = LH.
La longueur de la descente de la fourmi en suivant les marches est égale à LH + HM, donc à 2 LH.



On a par ailleurs $\sin(60°)=\frac{\text{LH}}{\text{LK}}$ où LK est la longueur de la montée.
Et le rapport cherché est $\frac{\text{LK}}{\text{LH}+\text{HM}}=\frac{\text{LK}}{2\,\text{LH}}=\frac{1}{2\sin(60°)}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. Réponse **D.** Parmi les 5 premiers jetons, il y a 1 rouge, 1 jaune, 1 bleu et 2 verts. Pour que cela soit aussi le cas du 2e au 6e jeton, il faut que le 6e soit de la même couleur que le premier, et ainsi de suite. La suite des couleurs est donc périodique de période 5.
Les jetons 2 et 5 (qui a la même couleur que le 20) sont verts. Alors, du fait qu'un rouge est suivi d'un jaune, le jeton 3 est rouge et le 4 est jaune. Et finalement le jeton 1 est bleu.
Le jeton 2021, qui a la même couleur que le 1 (car $2021=1+5\times404$), est donc bleu.

23. Réponse **D.** Avec $j=m^2$ et $k=n^2$, on a :
$j-k=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$.
$j-k$ étant premier, on a donc $m-n=1$ et $m+n$ premier. Et donc $2n+1$ (égal à $m+n$) est premier.
Les nombres proposés pour $k=n^2$ sont 10^2, 12^2, 16^2, 30^2 et 100^2.
$2n+1$ vaut alors successivement 21, 25, 33, 61 et 201.
Seul 61 est premier dans cette liste, donc $n=30$ et $k=30^2=900$.



24. Réponse **B.** Nommons quelques points de la figure et traçons la hauteur [HN] du triangle MLN grisé.
Les angles $\widehat{LIM}$ et $\widehat{JIK}$ sont égaux car chacun est complémentaire de $\widehat{LIK}$.
Les angles $\widehat{LIM}$ et $\widehat{LMN}$ sont égaux car chacun est complémentaire de $\widehat{LMI}$.
Les trois triangles rectangles IJK, ILM et MHN sont donc superposables car ils ont des angles égaux et des hypoténuses chacune égale au côté du grand carré ($MN = MI = IK = x$). Les longueurs de leurs autres côtés sont alors 4 (côté du petit carré) et y.

L'aire du triangle grisé, 1, est égale à $\frac{1}{2} ML \times HN = \frac{1}{2} y^2$. D'où $y = \sqrt{2}$.

On a $x^2 = IJ^2 + y^2 = 16 + 2 = 18$ (théorème de Pythagore dans le triangle IJK). L'aire du carré le plus grand est donc 18.

25. Réponse **6.** Soit un *nombre chameau* à cinq chiffres, *abcde*.
Si $c \geqslant 2$ alors $b \geqslant 3$, $d \geqslant 3$ et $a+b+c+d+e$ vaut plus que 6. Donc $c = 0$ ou $c = 1$.
Si $c = 1$, alors $b \geqslant 2$, $d \geqslant 2$ et comme $a \geqslant 1$ (le premier chiffre ne pouvant être 0), le seul *nombre chameau* possible est 12120.
Par ailleurs si $a \geqslant 3$ alors $b \geqslant 4$ et $a+b+c+d+e \geqslant 7$. Donc $a = 1$ ou $a = 2$.
Avec $c = 0$ et $a = 2$, le seul *nombre chameau* possible est 23010.
Avec $c = 0$ et $a = 1$, les possibilités sont 14010, 13020, 12030 et 12021.
Il y a donc, au total, 6 *nombres chameaux* à cinq chiffres dont la somme des chiffres est 6 : 12021, 12030, 12120, 13020, 14010 et 23010.

26. Réponse **4.** $1000 = 10^3 = 5^3 \times 2^3$.
Un entier cherché a donc nécessairement trois de ses chiffres qui sont des 5. Et les deux autres chiffres doivent avoir pour produit 8 : ce sont donc soit 1 et 8, soit 2 et 4.
Le nombre de manières de placer le 1 et le 8 dans l'entier naturel à cinq chiffres est 5×4, soit 20, et alors les trois autres chiffres sont des 5.
De même pour 2 et 4.
Il y a donc 40 entiers positifs à cinq chiffres dont le produit des chiffres est égal à 1000, c'est-à-dire 4 dizaines.