KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 80 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2020 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **A.** Le phénomène se produit en 2020. La date suivante est 2121, qui ne fait pas partie du 21e siècle. La réponse est donc « 1 fois ».

2. Réponse **C.** Horizontalement, la distance parcourue est égale à GH, soit 5 m. Il s'y ajoute les 2 m parcourus verticalement. Et $5+2=7$.

3. Réponse **D.** On peut enlever les 1 du produit, cela ne change rien. Comme $2\times5=10$, le chiffre des unités de $2\times3\times4\times5\times4\times3\times2$ est 0 et son chiffre des dizaines est le même que le chiffre des unités de $2\times3^2\times4^2 = 2\times144 = 288$. La somme cherchée est donc $0+8=8$.

4. Réponse **A.** Ceux qui viennent en voiture et ceux qui viennent en marchant correspondent aux deux pourcentages à peu près égaux : 11% et 12%. Ceux qui sont approximativement double l'un de l'autre sont donc 47% et 24% (en vélo et en transport en commun). Et le pourcentage restant, 6%, est le pourcentage de ceux qui viennent en trottinette.

5. Réponse **B.** Les nombres positifs p et q étant inférieurs à 1, le produit pq est inférieur à p et à q. Les nombres p et q étant supérieurs à 1/2, le produit pq est supérieur à 1/4. Seul le point B peut correspondre. [Note : le dessin montrant q légèrement inférieur à 1, pq doit être légèrement inférieur à p.]

6. Réponse **D.** En choisissant $x=2020$, on a :
$2020^2-2021\times2019 = x^2-(x+1)(x-1) = x^2-(x^2-1) = 1$.

7. Réponse **D.** On a $ab=\dfrac{1\,000\,000}{c}$. Ainsi, pour que b soit le plus grand possible, il faut que a soit le plus petit possible et vaille donc 1. La plus grande valeur possible pour b est alors c (car $b\leqslant c$) et le produit bc valant 1 000 000, on a $b=c=1000$.

8. Réponse **D.** Appelons p le poids d'un éléphant.
On a $e \times p = m \times \frac{k}{c}$. Donc $p = \frac{km}{ce}$.

9. Réponse **E.** La probabilité d'avoir 2 faces rouges est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
La probabilité d'avoir 2 faces bleues est la même, comme celle d'avoir 2 faces blanches. La probabilité d'avoir deux faces de même couleur est la somme de ces trois probabilités, soit $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

10. Réponse **C.** Soit $S = V + W + X + Y + Z$. Les 5 chiffres se retrouvent une fois dans chaque colonne de l'addition (unités, dizaines et centaines). Le résultat de l'addition vaut donc $100\,S + 10\,S + S$, soit $111 \times S$.
Ce résultat valant 2664, on a $S = \frac{2664}{111} = 24$.

11. Réponse **E.** Si $2x + y = 3$, alors $3x + 2y = 3x + (6 - 4x) = 6 - x$.
Le nombre $3x + 2y$ est donc, comme x et $6 - x$, un nombre indéterminé.

12. Réponse **B.** Après la 1re étape, il y a 3 *Face* et 2 *Pile*. Si on veut que la 2e étape soit la dernière, il faut retourner les 2 *Pile* ; et alors on est obligé de retourner une autre pièce de sorte qu'un *Face* est devenu *Pile*. On ne peut donc pas réaliser 5 *Face* en 2 étapes. Mais on le peut en 3 étapes (les 3 pièces que l'on va retourner sont soulignées) :
initialement, $\underline{\text{P}}\ \underline{\text{P}}\ \underline{\text{P}}$ P P,
après la 1re étape, F $\underline{\text{F}}\ \underline{\text{F}}\ \underline{\text{P}}$ P,
après la 2e étape, F $\underline{\text{P}}\ \underline{\text{P}}$ F $\underline{\text{P}}$,
après la 3e étape, F F F F F.

13. Réponse **B.** Dans chacune des 3 directions, une face entière d'un parallélépipède est accolée à une partie de même surface. Au total, la surface des parties accolées correspond à 2 fois chacun des 3 types de faces, soit l'équivalent d'un parallélépipède entier. Pour peindre la structure de 4 parallélépipèdes, il faut donc peindre l'équivalent de 3 parallélépipèdes entiers, ce qui nécessite 3 litres de peinture.

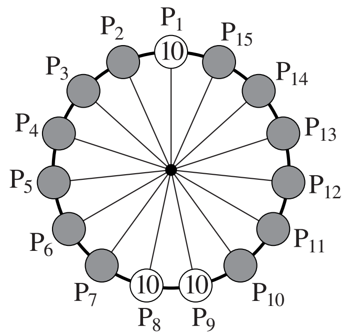
14. Réponse **E.** Soit $S = \frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020}$.

$$S = \frac{1010^2 \times (1 + 2^2 + 3^2)}{1010 \times 2} = \frac{1010 \times 14}{2} = 1010 \times 7 = 7070.$$

15. Réponse **B.** Appelons x le nombre de 100 chiffres. On a : $29\times10^{98}\leqslant x<3\times10^{99}$. Donc, puisque $10<29$, et en élevant chaque membre au carré, $100\times10^{196}<x^2<9\times10^{198}$, ou encore $1\times10^{198}<x^2<9\times10^{198}$. Le nombre de chiffres de x^2 est donc 199.

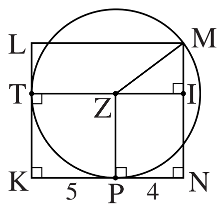
16. Réponse **B.** En développant T, on trouve :
$T=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz$.
Donc T est pair et ne peut pas prendre la valeur 1. On peut vérifier que T peut valoir 0 (avec, par exemple, $x=y=z$), 2 (avec $x=1$, $y=z=0$), 6 (avec $x=2$, $y=1$, $z=0$) et 8 (avec $x=y=2$, $z=0$).

17. Réponse **A.** Numérotons les 15 positions de P_1 à P_{15} en partant de celle qui contient le 10.
La somme de 7 nombres consécutifs étant toujours la même, un même nombre se trouve aux deux positions ayant exactement 6 positions entre elles. Ainsi, en P_8 d'une part, et P_9 d'autre part, se trouve le même nombre qu'en P_1.



Et, partant de P_8, on conclut successivement qu'aux positions P_{15}, P_7, P_{14}, P_6, P_{13}, P_5, P_{12}, P_4, P_{11}, P_3, P_{10} et P_2 se trouve aussi le même nombre. Au final, le nombre 10 est écrit aux quinze positions de la roue.

18. Réponse **B.** Soit T le point de tangence du cercle sur [KL] et Z le centre du cercle.
Le quadrilatère KTZP est un carré (3 angles droits et deux côtés consécutifs égaux).
Le cercle a donc un rayon, égal à KP, soit 5.
Appelons I le projeté orthogonal de Z sur (MN).
On a $ZI=PN=4$ et $ZM=KP=5$.



D'où, par le théorème de Pythagore, $MI=3$. Et $MN=MI+IN=3+5=8$.
L'aire du rectangle vaut donc $KN\times MN=9\times8=72$.

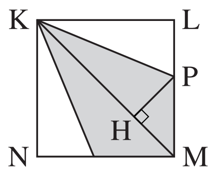
19. Réponse **A.** Les premiers termes de la suite sont 1, 3, 4, 7, 11, 18…
Les 4^e^ et 5^e^ termes étant impairs comme les 1^er^ et 2^e^, la suite a une périodicité de 3 pour ce qui est de la parité de ses termes : 2 impairs suivis d'un pair. Ainsi, il y a un 1 terme pair tous les 3 termes. Comme $2020=673\times3+1$ et que la suite commence par un nombre impair, il y a donc 673 termes pairs parmi les 2020 premiers termes.

20. Réponse **B.** Les côtés des plus petits carrés sont 1 et 3.
Le théorème de Pythagore donne la longueur de l'hypoténuse du petit triangle rectangle blanc : $\sqrt{(3-1)^2+1^2}=\sqrt{5}$.
Le triangle rectangle blanc le plus grand est un agrandissement du plus petit de facteur 3, son hypoténuse mesure donc $3\sqrt{5}$.
Le grand carré a donc un côté de $4\sqrt{5}$ et son aire vaut 16×5, soit 80.

21. Réponse **D.** On tire de l'examen du morceau de parabole les informations suivantes :
• $a > 0$ (branches infinies dans le sens de l'axe des y) ;
• $c < 0$ (ordonnée du point d'intersection avec l'axe des y) ;
• $\dfrac{-b}{2a} > 0$ (abscisse du minimum), d'où $b < 0$ puisque $a > 0$.
Et donc, parmi les 5 propositions, seul bc est un nombre positif.

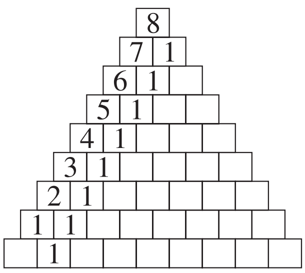
22. Réponse **D.** Soient x et y les côtés du jardin rectangulaire initial dont l'aire est donc xy. L'un des côté ayant été multiplié par 1,2 (augmentation de 20%) et l'autre par 1,5 (augmentation de 50%), l'aire du jardin agrandi est $1{,}2 \times 1{,}5 \times xy$ soit $1{,}8\,xy$.
L'aire grisée est la différence entre l'aire de la moitié du jardin agrandi et celle de la moitié jardin initial : $\dfrac{1{,}8\,xy}{2} - \dfrac{xy}{2} = 0{,}4\,xy$.
Cette aire valant 30, on a $xy = \dfrac{30}{0{,}4} = 75$.

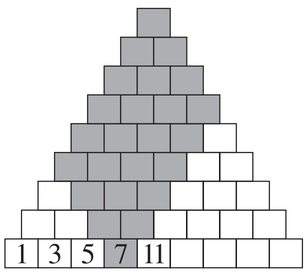
23. Réponse **A.** Soit KLMN le carré.
Soit [KP] une pliure, P étant sur [LM] ;
(KP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MKL}$.
Soit H le pied de la perpendiculaire à (KM) issue de P.



On a $KM = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) et $KH = KL = 1$. Donc $HM = \sqrt{2} - 1$. Comme le triangle HPM est rectangle avec un angle de 45°, il est isocèle, et $PH = HM = \sqrt{2} - 1$.
L'aire cherchée est le double de l'aire du triangle KMP. Elle vaut donc $KM \times PH = \sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$.

24. Réponse **C.** Commençons par déterminer la hauteur de la pyramide. Dans le dessin ci-dessous à gauche, l'exposant du facteur 3 dans un nombre a été noté dans les cases : sur la ligne du bas, aucun nombre n'est divisible par 3 sauf 3 qui figure en 2^{e} position dans la ligne ; et en remontant les lignes, on conclut que, si un seul nombre de la pyramide est divisible par 3^8, c'est que la pyramide est composée de 9 lignes.





On peut alors compter les nombres divisibles par 7 : à partir de la case contenant 7, on colorie en gris toutes les cases contenant un nombre divisible par 7 (dès qu'une case est au-dessus d'une case où le nombre est divisible par 7, son nombre est aussi divisible par 7). Finalement, la pyramide contient 4×6 soit 24 nombres divisibles par 7.

25. Réponse **4.** Aucun des huit entiers ne peut avoir 0 comme chiffre des unités donc les huit chiffres des unités des nombres consécutifs sont soit 1, 2, … , 8 soit 2, 3, … , 9. Notons que 3, 5, 7 et 8 sont dans les deux listes (et sont premiers entre eux).
Si un entier $\overline{cdu}$ (c chiffre des centaines, d chiffre des dizaines, u chiffre des unités) est divisible par u alors $\overline{cdu}-u$, soit $\overline{cd0}$ l'est aussi.
Nous cherchons donc des entiers tels que $\overline{cd0}$ soit multiple de 3, 5, 7 et 8 et donc de $3\times5\times7\times8=840$.
$\overline{cd0}$ ne peut donc être que 840 (dont les autres multiples ont au moins 4 chiffres) et comme 849 est n'est pas divisible par 9, les huit entiers consécutifs sont 841, 842, … , 848 (chacun étant bien divisible par son chiffre des unités).
La différence cherchée est $8-4=4$.

26. Réponse **6.**
Marie avait $\binom{16}{2}$ soit $\frac{16\times15}{2}$ choix possibles pour sa glace.
Soit k le nombre de parfums restants quand, le soir, Lisa commande une glace à trois parfums.
Lisa a alors $\binom{k}{3}$ soit $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$ choix possibles.
On a donc : $\frac{16\times15}{2}=\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$.
D'où $k(k-1)(k-2) = 16\times15\times3 = 5\times2^4\times3^2 = 10\times9\times8$.
Il reste donc 10 parfums sur les 16 initiaux : 6 parfums sont épuisés.