KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 75 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2018 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **D.** Les résultats sont : A = 11, B = 10 , C = 10, D = 8 et E = 9 ; le plus petit est D.

2. Réponse **E.** Le 4 du mois est un jeudi, donc le 25 aussi ($25 = 4 + 7 \times 3$). Le 26 est un vendredi, le 27 un samedi et le 28 un dimanche.

3. Réponse **B.** Léa passe dans la pièce E, puis dans A puis dans B. Si elle va en D, elle passe ensuite en C puis en B ; et si elle va en C, elle passe ensuite en D puis en B. Dans les deux cas elle se retrouve en B à la fin. (Remarque : elle ne peut finir que dans la pièce ayant un nombre impair de portes.)

4. Réponse **D.** Chaque fois que Thor frappe une pierre, il se retrouve avec 4 pierres de plus. En commençant avec 7 pierres, il peut donc se retrouver avec un nombre de pierres égal à 11, 15, 19, 23, 27, etc.

5. Réponse **C.** Pour avoir 4 faces peintes, un cube doit avoir 2 faces cachées. Les 4 extrémités n'en ont qu'une et 2 cubes (au milieu des colonnes) en ont 3. Les autres cubes, soit 6 cubes, ont 2 faces cachées et 4 faces peintes.

6. Réponse **D.** Pour être sûr d'avoir un bonbon au citron, il faut avoir pris 58 bonbons ($65 - 8 + 1 = 58$) et donc au moins 12 poignées de 5 bonbons.

7. Réponse **E.** Les Dagobiens verts ne vivent que sur Mars ! Aucun ne vit donc sur Vénus.

8. Réponse **D.** $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$ donc $U_{n+2} = \frac{1}{4} U_n$ et $U_{n+k} = \frac{1}{2^k} U_n$.
D'où $U_{2018} = \frac{1}{2^{2017}} U_1 = \frac{2^{2020}}{2^{2017}} = 2^3 = 8$.

9. Réponse **B.** En appelant x, y et z les mesures des côtés de la brique, les aires des faces sont $S = xy$, $T = yz$ et $U = zx$. On a donc $STU = x^2y^2z^2$. Et le volume de la brique étant xyz, il est aussi égal à $\sqrt{STU}$.

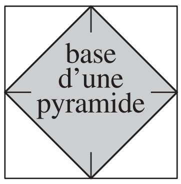
10. Réponse **A.** Si deux nombres ont pour somme le nombre impair 1001, c'est que l'un est pair et l'autre impair. Comme 2 est le seul nombre premier pair et que $1001 = 2 + 999$, avec 999 non premier, il est impossible d'écrire 1001 comme somme de deux nombres premiers.

11. Réponse **B.** Le volume de la partie commune aux deux cubes est égal à 10% de V et à 15% de W.
On a donc $10V = 15W$ soit $V = \frac{15}{10}W = \frac{3}{2}W$.

12. Réponse **E.** $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ donc $4 < \sqrt{17} < 5$. D'où :
$|5 - \sqrt{17}| + |4 - \sqrt{17}| = (5 - \sqrt{17}) + (\sqrt{17} - 4) = 1$.

13. Réponse **D.** La croissance de la hauteur d'eau est de plus en plus lente : on cherche donc un vase dont la section augmente continuellement et, parmi les propositions, seul le vase conique (D) vérifie cette propriété. (Remarque : la courbe tracée montre bien une variation en h^3 du volume, le volume étant proportionnel au temps puisque le débit est constant.)

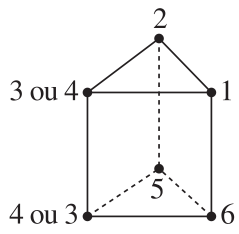
14. Réponse **D.** L'octaèdre est formé de deux pyramides identiques,
de hauteur $\frac{1}{2}$ et de base carrée d'aire $\frac{1}{2}$.
Le volume de chaque pyramide est donc
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{12}$.
Et le volume de l'octaèdre est $2 \times \frac{1}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.



15. Réponse **A.** Sur les 36 paires de résultats possibles, Victor obtient strictement plus que Wafik aucune fois s'il fait 1, 2 fois s'il fait 2 ou 3, 4 fois s'il fait 4 ou 5 et 6 fois s'il fait 6. La probabilité que Victor obtienne un nombre strictement plus grand que Wafik est donc :
$\frac{(2 \times 2) + (4 \times 2) + 6}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

16. Réponse **A.** Deux quelconques des carrés ont une arête verticale commune joignant deux sommets.

Comme la somme des quatre sommets d'un carré est toujours la même, il s'ensuit que les sommes des deux autres sommets de chacun des deux carrés est aussi la même. Ainsi la somme des deux sommets sur chaque arête verticale est la même ; elle vaut le tiers de la somme totale $(1+2+3+4+5+6=21)$ donc 7.



Et $x=7-5=2$. (La situation est bien possible comme montré sur le dessin.)

17. Réponse **C.** $18^{2017}+18^{2018}=18^{2017}(1+18) = 2^{2017}\times 9^{2017}\times 19$. Ce nombre est divisible par $8=2^3$, par $18=2\times 9$, par $38=2\times 19$, par $48=2^4\times 3$. Il n'est pas divisible par 7 ni par 28 qui est multiple de 7.

18. Réponse **B.** Appelons n le nombre de mouvements pour que le pentagone se superpose de nouveau au trou pour la première fois. Un pentagone régulier étant invariant par rotation de 72° $(360\div 5=72)$, on doit avoir $21n$ multiple de 72 soit $7n$ multiple de 24 et donc $n=24$. Chaque sommet du pentagone aura alors effectué 24 rotations d'angle 21°. $24\times 21=504=360+144=360+(2\times 72)$. On verra le pentagone comme après 2 mouvements donc comme sur la figure B.

19. Réponse **D.** Le palmier (P), le figuier (F) et le manguier (M) sont sur un cercle de centre l'olivier (O) et de rayon 50 m. Comme PM = 100 m, P et M sont diamétralement opposés sur ce cercle et PMF est donc un triangle rectangle en F. D'après le théorème de Pythagore, on a $MF^2+PF^2=PM^2$. D'où $MF^2=100^2-60^2=20^2(5^2-3^2)=20^2\times 4^2$ et la distance cherchée est MF = 80 m. (Remarque : il y a deux positions possibles pour le figuier par rapport aux autres arbres.)

20. Réponse **D.** $x^2-x-2018=(x-n)(x-m)=x^2-x(n+m)+nm$ donc $n+m=1$. Comme $n^2=n+2018$, $n^2+m=2018+n+m=2018+1=2019$.

21. Réponse **B.** 6 et 4 sont pris par la même personne sinon les deux produits seront pairs et leur somme sera paire et supérieure à 2 donc ne sera pas un nombre premier. De même 6 et 3 sont pris par la même personne sinon la somme sera un multiple de 3 plus grand que 3. Et donc les trois cartes de Marion sont 6, 4 et 3, de somme 13. (Les deux produits sont 72 et 35 et leur somme est 107 qui est premier.)

22. Réponse **B.** Si A est le seul menteur, alors C et D disent vrai et A ne mentirai pas : impossible.

Si B est le seul menteur, alors il est le plus petit, mais D aussi : impossible.

Si C est le seul menteur, alors D est le plus petit, B est le plus grand car ce ne peut être ni A ni C (ces derniers sont alors 2^e^ et 3^e^ en taille sans qu'on ne sache l'ordre).

Si D est le seul menteur, personne ne peut être le plus petit : impossible.

Finalement C ment et B est le plus grand.

23. Réponse **C.** La représentation graphique de f est une parabole (d'axe parallèle à l'axe des ordonnées) dont les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(a\,;0)$ et $(b\,;0)$ où a et b sont les racines de x^2+px+q. On a $a+b=-p$ et l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x=-\frac{p}{2}$.
Cette droite est aussi axe de symétrie du cercle et le quatrième point d'intersection est donc le symétrique de $(0\,;q)$ par rapport à cette droite, c'est donc $(-p\,;q)$.

24. Réponse **A.** Le nombre de manières de choisir un mâle et une femelle est 45×55.
Le nombre total de possibilités de choisir 2 kangourous est $\frac{100\times99}{2}$.
La probabilité cherchée vaut donc :
$\frac{2\times45\times55}{100\times99}=\frac{2\times5\times9\times5\times11}{2\times5\times2\times5\times9\times11}=\frac{1}{2}$.

25. Réponse **7.** Le nombre de diagonales d'un polygone régulier à n côtés (et donc à n sommets) est $\frac{n(n-3)}{2}$ (pour chaque sommet, il y a des diagonales vers tous les sommets sauf lui et ses voisins, et on divise par deux pour ne compter qu'une fois chaque diagonale).
On cherche donc n tel que : $\frac{3n(3n-3)}{2}+\frac{(3n+41)(3n+38)}{2}=2018$.
Soit $18n^2+3n(41+38-3)+38\times41=4036$,
$18n^2+3n\times76=4036-1558=2478$, $3n^2+38n-413=0$.
Les solutions de cette équation sont 7 et $-\frac{59}{3}$.
L'entier positif cherché est donc 7.

26. Réponse **0.**
$18!=2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18$.
$18!=2^{16}\times3^8\times5^3\times7^2\times11\times13\times17=2^{13}\times3^8\times7^2\times11\times13\times17\times1000$.
Le troisième chiffre caché est le dernier non nul de 18! et comme $3^8=81^2$ et $3\times7=21$, c'est le chiffre des unités de $2^{13}\times7^2$ donc de $1024\times8\times49$ ou de $4\times8\times9$ donc 8.
18! s'écrit donc 6 A02 373 7B5 728 000.
Le critère de divisibilité par 9 donne $A+B=4$ ou $A+B=13$.
Le critère de divisibilité par 11 donne $5+B=A+1$ ou $5+B=A+12$ soit $A-B=4$ ou $B-A=7$.
Seuls $A+B=4$ et $A-B=4$ donne une solution : $A=4$ et $B=0$.
C'est donc 0 qui est masqué par le rectangle noir.