KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 75 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2018 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse **A.** Les résultats sont : $A = 11$, $B = 0$, $C = 10$, $D = 10$ et $E = 9$; le plus grand est A.

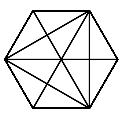
2. Réponse **C.** Si chaque frère a 2 frères, c'est qu'il y a 3 frères. Et si chaque sœur a 1 sœur, c'est qu'il y a 2 sœurs. Il y a donc au moins 5 enfants dans la famille.

3. Réponse **B.** Géométriquement, ce que l'on voit, c'est le symétrique par rapport à une droite verticale. Le plus simple est de regarder par transparence le verso de la feuille du sujet.

4. Réponse **B.** Le troisième côté mesure entre 3 cm ($5 - 2 = 3$) et 7 cm ($5 + 2 = 7$), strictement. Ce ne peut donc être que 5 cm, et le triangle est isocèle.

5. Réponse **B.** Le chiffre S vaut 9 (car $5 + 9 = 14$) et alors, R vaut 0 (car, avec la retenue $1 + 4 = 5$) puis $P + Q$ vaut 6.
Donc $P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$.

6. Réponse **A.** $X = Y = Z$, chacune des aires étant égale à la moitié de celle de l'hexagone régulier.
(Le dessin ci-contre montre l'hexagone divisé en 12 triangles de même aire.)



7. Réponse **B.** $42 = 2 \times 3 \times 7$. $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$. $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$.
Le PGCD de 42, 60 et 90 est 6 : on peut donc faire au plus 6 cageots (constitués chacun de 7 pêches, 10 abricots et 15 cerises).

8. Réponse **A.** 25% de 2018 et 2018% de 25 sont égaux. Leur somme fait donc 50% de 2018, soit 1009.

9. Réponse **C.** $10^9-1=999\,999\,999$ donc $\dfrac{1}{9}\times(10^9-1)=111\,111\,111$ qui a 9 chiffres.
Et le produit $111\,111\,111\times10^9$ comporte donc 18 chiffres.

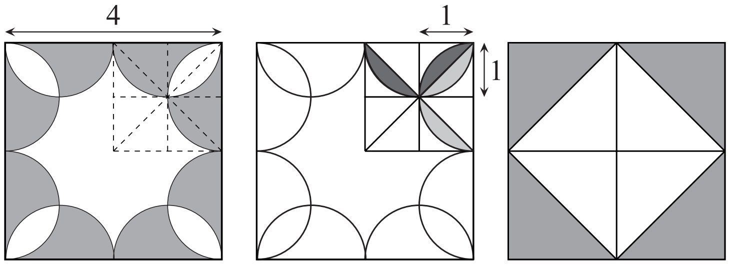
10. Réponse **B.** Il y a deux façons d'atteindre le point central depuis K, puis quatre façons d'atteindre L depuis le point central. Au total, cela fait donc 2×4 soit 8 itinéraires différents possibles.

11. Réponse **B.** Soit L le prix du livre en €. On a :
$\dfrac{1}{3}L+\dfrac{1}{4}L+10=L$ d'où $L-\dfrac{7}{12}L=10$ et $L=24$.

12. Réponse **D.** Si on place l'arrêt de bus entre les deux immeubles à x mètres du second immeuble (et donc à $250-x$ du premier), la distance totale parcourue par les étudiants sera $150x+100(250-x)=25000+50x$. Cette expression est minimale quand x est minimal, soit $x=0$. Il faut donc placer l'arrêt devant le second immeuble.

13. Réponse **E.** Soit n l'entier du milieu.
On a $18^{18}=(n-1)+n+(n+1)=3n$.
D'où $n=\dfrac{18^{18}}{3}=\dfrac{18\times18^{17}}{3}=6\times18^{17}$.

14. Réponse **B.** Sur la figure ci-dessous au milieu, on voit que les deux surfaces gris foncé sont égales (elles correspondent à l'aire entre un quart de cercle de rayon 1 et la corde qui joint les deux extrémités de ce quart de cercle). C'est aussi le cas pour les deux surfaces gris clair.

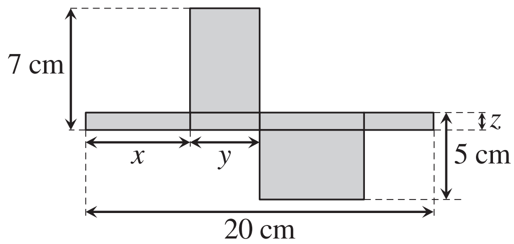


Avec les mêmes remarques pour les trois autres coins du grand carré, on conclut que l'aire à calculer est égale à l'aire laissée en blanc dans la figure de droite.
Cette aire, égale à la moitié de celle du grand carré, vaut $\dfrac{4\times4}{2}$ soit 8.

15. Réponse **E.** 40 trains ont circulé donc le total des arrivées et des départs est 2×40 soit 80. Sachant que le total des arrivées et des départs pour les autres villes que Q est $10 + 10 + 10 + 10$ soit 40, le total des arrivées et des départs pour Q est $80 - 40$ soit 40.

16. Réponse **D.** Sur les 36 paires de résultats possibles, Victoire obtient strictement plus que Pauline : 1 fois si Pauline fait 5, 2 fois si Pauline fait 4, 3 fois si Pauline fait 3, 4 fois si Pauline fait 2, 5 fois si Pauline fait 1, 6 fois si Pauline fait 0. La probabilité que Victoire obtienne un nombre strictement plus grand que Pauline est donc :
$\dfrac{1+2+3+4+5+6}{36} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$.

17. Réponse **B.** Soient x, y et z les dimensions de la boîte en cm.
On a : $2x + 2y = 20$ soit $x + y = 10$;
$x + z = 7$ et $y + z = 5$.
Ce qui donne $z = 1$, $x = 6$ et $y = 4$.



Le volume de la boîte est $xyz = 6 \times 4 \times 1$ soit 24 cm^3.

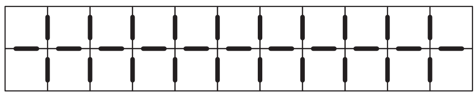
18. Réponse **D.** On a $f(2) = f(1 + 1) = f(1)f(1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.
$f(1) = f(1 + 0) = f(1)f(0)$ d'où $f(0) = 1$.
Et donc $f(0) + f(1) + f(2) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$.
Remarque : la fonction f peut s'écrire $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2^x}$.

19. Réponse **D.** Le produit des nombres écrits au tableau est 2018 donc le produit de ces entiers sauf le nombre 2018 que l'on sait déjà parmi eux est 1. Cela implique que ces entiers sont des -1 en nombre pair et/ou des 1. Et, comme la somme totale est 2018, la somme des 1 et des -1 doit être nulle. Sachant qu'il y a entre 2 et 6 entiers au total dont 2018, on en déduit l'unique possibilité : 2018, 1, -1, -1, 1. Il y a donc 5 nombres écrits au tableau.

20. Réponse **E.** Si le voisin de 20 (en tournant dans le sens horaire) est x, le nombre suivant est $x - 20$, celui d'après est -20. Le suivant est 18 qui est déjà marqué. En continuant, on trouve successivement 38, 20, -18, -38, -20, 18, 38. Et 38 est le nombre écrit en S.

21. Réponse **D.** Soit $\overline{cdu}$ un nombre entier à trois chiffres tel que :
$\overline{cu} = \frac{1}{9}\overline{cdu}$ avec $1 \leqslant c \leqslant 9$, $0 \leqslant d \leqslant 9$ et $0 \leqslant u \leqslant 9$.
On a $9(10c+u)=100c+10d+u$. D'où $10c+10d=8u$ ou $5c+5d=4u$.
u doit donc être un multiple de 5 non nul, d'où $u=5$. Et alors $c+d=4$.
Ce qui donne un total de 4 nombres : 135, 225, 315 et 405.

22. Réponse **D.** Quelle que soit la configuration, la somme obtenue par Diane est le nombre de côtés entre deux cases de couleurs différentes. Une grille rectangulaire de 22 cases a soit 22 cases sur 1, soit 11 cases sur 2. Dans le premier cas, il y a 21 côtés qui séparent deux cases voisines, donc la somme obtenue par Diane ne peut pas dépasser 21. Dans le second cas, en alternant cases blanches et noires comme sur un échiquier, tout côté séparant deux cases sépare deux cases de couleurs différentes. Cette configuration donne donc la somme maximale. Si la grille a 11 colonnes et 2 lignes, le nombre de côtés séparant deux cases est $2 \times 10 + 11$ soit 31.



La somme des nombres écrits est donc au maximum 31.

23. Réponse **C.** Soient $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ les quatre nombres entiers.
Les résultats obtenus impliquent :
$a+b+c+3d=3\times 29=87$,
$a+b+3c+d=3\times 23=69$,
$a+3b+c+d=3\times 21=63$,
$3a+b+c+d=3\times 17=51$.
En ajoutant membre à membre les trois dernières égalités, on a
$3d+5(a+b+c)=69+63+51=183$, dont on soustrait la 1^{re} égalité :
$4(a+b+c)=183-87=96$. D'où $a+b+c=24$.
Le plus grand des quatre nombres est donc $d=\frac{87-24}{3}=21$.

24. Réponse **E.** On s'aperçoit que sur les trois lignes, on doit avoir les paires (3, 6), (1, 5) et (2, 4), ou (3, 6), (1, 2) et (4, 5). Dans le premier cas, peu importe la ligne où se situe chaque paire, ce qui nous donne six possibilités. Le 3 va dans n'importe laquelle des deux colonnes (le 6 suivra). Pour terminer le remplissage, on doit mettre les nombres 4 et 5 dans la même colonne, n'importe laquelle. On a donc $6\times 2\times 2$ soit 24 possibilités dans ce cas. Et autant dans le second cas. Ce qui en fait 48.

25. Réponse **9.** Les nombres cherchés sont les nombres entre 10 et 99, non premiers et multiples uniquement de nombres premiers supérieurs ou égaux à 5. De plus, comme $11^2 > 100$, ces nombres sont des multiples de 5 ou de 7 (seuls premiers entre 3 et 11).
Cela fait 9 nombres : 25 (5×5), 35 (5×7), 55 (5×11), 65 (5×13), 85 (5×17), 95 (5×19), 49 (7×7), 77 (7×11) et 91 (7×13).

26. Réponse **4.** Si le grand cube a un côté de 3 petits cubes (ou moins), il n'y a pas assez de petits cubes au total.
Si le grand cube a un côté de 4, il est composé de 64 petits cubes et, si une des faces est peinte, il restera 48 petits cubes non peints, si plus d'une face est peinte, il restera moins de 45 petits cubes non peints.
Si le grand cube a un côté de 6 (ou plus), il a au moins 4×4×4 soit 64 petits cubes non peints à l'intérieur.
Le grand cube est donc un cube 5×5×5 de 125 petits cubes. Il a 3×3×3 soit 27 petits cubes non peints à l'intérieur et 45 – 27 soit 18 autres cubes non peints. En examinant les différentes façons de peindre les faces, la seule qui laisse 18 cubes non peints parmi les cubes extérieurs est celle où quatre faces sont peintes, les faces non peintes étant deux faces opposées (chacune avec 9 petits cubes non peints).