KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

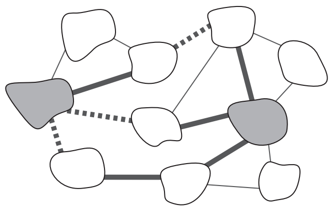
Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 70 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2017 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **C.** $\dfrac{20\times17}{2+0+1+7}=\dfrac{2\times10\times17}{10}=2\times17=34.$

2. Réponse **A.** En notant t la taille du frère en centimètres, on a $\dfrac{1}{90}\,t=1{,}8$ soit $t=162$.

3. Réponse **C.** On peut supprimer 3 ponts (exemple en pointillés sur le dessin) mais pas moins car on peut trouver trois chemins utilisant des ponts tous différents (traits épais sur le dessin).



4. Réponse **E.** On a $\dfrac{24}{100}p=\dfrac{42}{100}q$. D'où $24p=42q$ et $4p=7q$.

5. Réponse **C.** Si $x\leqslant 0$, alors $f(x)>0$. Le quadrant III ne contient donc aucun point de la représentation graphique de f (et on trouve des points dans les quadrants II, I et IV en prenant respectivement $x=-1$, $x=1$ et $x=3$).

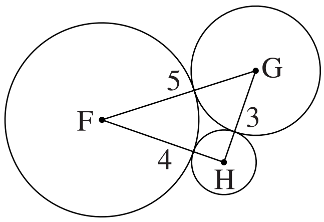
6. Réponse **B.** Le triangle SOT est équilatéral donc l'angle en O de ce triangle mesure 60°.
L'aire grisée est donc égale à $2\times\dfrac{60}{360}$ de l'aire du disque soit $\dfrac{1}{3}$.

7. Réponse **C.** La fonction polynôme du second degré représentée à sa concavité vers le haut. Elle est donc d'abord décroissante puis croissante. Si l'image C était un extrait de sa représentation graphique, la fonction serait décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et aucune autre image ne conviendrait. C'est donc l'image C qui n'est pas un extrait de la représentation graphique (et on peut vérifier que les quatre autres images sont cohérentes).

8. Réponse **B.** Les probabilités de tirage d'un pion bleu sont exactement les proportions de pions bleus dans chaque boîte, soit :
A, $\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$; B, $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; C, $\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$; D, $\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$; E, $\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$.
La plus grande est $\frac{3}{5}$ avec la boîte B.

9. Réponse **B.** Le nombre de point(s) commun(s) de la représentation graphique de f avec celle de, respectivement, g_1, g_2, g_3, g_4 et g_5 est 2, 3, 2, 2 et 1. Les abscisses des points communs sont respectivement (0 et 1), (–1, 0 et 1), (0 et 1), (–1 et 0), 0.

10. Réponse **A.** Les cercles étant tangents, les longueurs des côtés du triangle FGH s'obtiennent en additionnant les rayons : $FG=3+2=5$, $FH=2+2=4$ et $GH=2+1=3$.
D'après le théorème de Pythagore, ce triangle est rectangle en H.



L'aire recherchée est donc $\frac{1}{2}\times FH\times GH = 6$.

11. Réponse **E.** Si le rayon de la base de Z est 10% plus grand soit 1,1 fois plus grand que le rayon de la base de Y alors l'aire de la base de Z est $1{,}1^2$ soit 1,21 fois plus grande que l'aire de la base de Y.
Le volume d'un cylindre est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur. Si les deux cylindres ont même volume, la hauteur de Y doit donc être 1,21 fois plus grande que la hauteur de Z c'est-à-dire plus grande de 21%.

12. Réponse **D.** Le nombre d'arêtes de ce polyèdre est égal au nombre de côtés des faces carrées donc à 6×4 soit 24. Il est aussi égal au nombre de côtés des faces triangulaires.
Le polyèdre a donc $\frac{24}{3}$ soit 8 faces triangulaires.

13. Réponse **B.** On ne peut pas composer le nombre 2017 si et seulement si sur chacun des 4 tétraèdres c'est le même chiffre qui est invisible.
Cela arrive avec la probabilité $\frac{4}{4^4}$ soit $\frac{1}{64}$.
Et la probabilité cherchée est donc $1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$.

14. Réponse **D.** Si 5 était racine du polynôme considéré pour des valeurs m et n entières, on aurait $5^4 + 5^2m + 5n = -24$; ce qui est impossible car 5 divisant le premier membre devrait diviser 24.
On peut vérifier qu'il existe des polynôme du type $5x^3 + mx^2 + nx + 24$ dont 1, – 1, 3 et 6 sont racines, par exemple, respectivement :
$5x^3 - 5x^2 - 24x + 24$, $5x^3 + 5x^2 + 24x + 24$, $5x^3 - 15x^2 - 8x + 24$
et $5x^3 - 30x^2 - 4x + 24$.

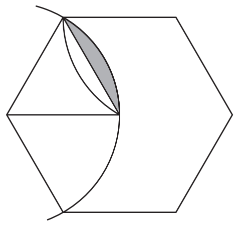
15. Réponse **E.** Un carré de $(2n)\times(2n)$ pions a le même nombre de pions noirs et de pions blancs ($2n^2$ chacun). Un carré de $(2n+1)\times(2n+1)$ pions a $2n^2 + 2n + 1$ pions noirs et $2n^2 + 2n$ pions blancs. Ainsi, le carré 44×44 a 968 pions de chaque couleur, et le carré 45×45 a 1013 pions noirs et 1012 pions blancs. Julia s'arrêtera donc après avoir composé le carré 44×44 et il restera $1009-968$ soit 41 jetons noirs et $1008-968$ soit 40 jetons blancs.

16. Réponse **D.** Chacun des 4 morceaux coupés est un tétraèdre déduit du grand tétraèdre par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ donc son volume est $\frac{1}{8}$ du volume du tétraèdre initial.
Le volume de ces quatre morceaux est donc $4\times\frac{1}{8}$ soit la moitié du volume du tétraèdre initial. Et donc le solide restant obtenu a aussi un volume moitié de celui du tétraèdre initial.

17. Réponse **D.** Notons O le centre du quadrilatère.
D'après le théorème de Pythagore :
$2019^2 = \mathrm{ON}^2 + \mathrm{OM}^2$, $2018^2 = \mathrm{OM}^2 + \mathrm{OL}^2$, $2017^2 = \mathrm{OL}^2 + \mathrm{OK}^2$.
On en déduit que $\mathrm{KN}^2 = \mathrm{ON}^2 + \mathrm{OK}^2 = 2019^2 + 2017^2 - 2018^2$.
Or $2019^2 + 2017^2 = (2018+1)^2 + (2018-1)^2 = (2\times2018^2) + 2$.
Donc $\mathrm{KN}^2 = 2018^2 + 2$ et $\mathrm{KN} = \sqrt{2018^2+2}$.

18. Réponse **D.** Si Tity ment sur la troisième et la sixième affirmation, alors le nombre devrait être supérieur à 50 (affirmation 2) et inférieur à 30 (affirmation 4) : impossible.
Si Tity ment sur la deuxième et la cinquième affirmation, alors le nombre recherché contient un 2 et un 7 (affirmation 1 et 6) et il vaut 27 ou 72 ce qui contredit le mensonge 5 (le nombre est divisible par 3) : impossible.
Ainsi, Tity ment sur la première et la quatrième affirmation : le nombre contient un 7 (affirmation 6) et est pair (affirmation 3) donc appartient à $\{70 ; 72 ; 74 ; 76 ; 78\}$. Comme il ne contient pas de 2 (mensonge 1) et qu'il est multiple de 3 (affirmation 5), c'est 78. Et la somme de ses chiffres est 15.

19. Réponse **E.** Calculons l'aire d'un demi-pétale. C'est l'aire d'un sixième de disque de rayon 1 moins l'aire d'un triangle équilatéral de côté 1 :



$$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

La fleur est composée de 12 demi-pétales, son aire est donc $2\pi-3\sqrt{3}$.

20. Réponse **E.** Calculons les premiers termes de la suite :

$a_1 = 2017$, $a_2 = \dfrac{2016}{2017}$, $a_3 = \dfrac{2016-2017}{2016} = \dfrac{-1}{2016}$, $a_4 = 2017 = a_1$.

Chaque terme de la suite se calculant uniquement avec le précédent, on en déduit que la suite est périodique de période 3.
Comme $2017=(672\times 3)+1$, on a $a_{2017} = a_1 = 2017$.

21. Réponse **A.** Soit z la longueur de l'hypoténuse du triangle et x et y celles des deux autres côtés. On a : $x+y+z=18$ et $x^2+y^2+z^2=128$.
D'après le théorème de Pythagore, $z^2=x^2+y^2$. Donc $2z^2=128$ et $z=8$.
Alors $x+y=10$ et $x^2+y^2=64$.
D'où : $100 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 64+2xy$.
Donc $xy=18$. Et l'aire du triangle vaut $\dfrac{xy}{2}=9$.

22. Réponse **A.** Si $y>0$, la seconde équation donne $x=10$ et alors la première mène à $y=-15$ qui contredit notre hypothèse.
Si $x<0$, la première équation donne $y=5$ et alors la seconde mène à $x=10$ qui contredit notre hypothèse.
Par conséquent $y\leqslant 0$, $x\geqslant 0$ et les équations sont $2x+y=5$ et $x-2y=10$.
D'où $x=4$ et $y=-3$. Et finalement : $x+y=1$.

23. Réponse **D.** Soit x le nombre écrit dans la case centrale.
La différence entre x et un nombre d'une de ses 4 cases voisines vaut 1 et la différence entre x et un nombre d'une des 4 cases des coins vaut au plus 2 : on en déduit que la somme de tous les nombres (500) est comprise entre $9x-12$ et $9x+12$.
Donc $9x\leqslant 512$ et $9x\geqslant 488$ et x ne peut valoir que 55 ou 56.
Si x est impair, alors les nombres des 4 cases voisines sont pairs, les nombres des 4 coins sont impairs et la somme des 9 nombres est impaire et ne peut valoir 500.
x est donc pair d'où $x=56$ et on peut effectivement remplir les neuf cases comme montré ci-contre.

56	55	56
55	56	55
56	55	56

56	55	54
57	56	55
56	55	56

24. Réponse **D.** On remarque que $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$ sont les seules puissances de 2 ayant exactement trois chiffres et que $(X+Y)^Z$ est une puissance de 2 si, et seulement si, X+Y est une puissance de 2. Et :

- Si $X+Y=2$, alors (X ; Y) peut valoir (1 ; 1) ou (2 ; 0) et Z peut valoir 7, 8 ou 9 : cela fait 6 entiers « XYZ » possibles.
- Si $X+Y=2^2=4$, alors (X ; Y) peut valoir (1 ; 3), (2 ; 2), (3 ; 1) ou (4 ; 0) et Z vaut 4 car il faut que l'exposant 2Z soit égal à 7, 8 ou 9 : cela fait 4 possibilités.
- Si $X+Y=2^3=8$, alors, (X ; Y) peut valoir (1 ; 7), (2 ; 6), (3 ; 5), (4 ; 4), (5 ; 3), (6 ; 2), (7 ; 1) ou (8 ; 0) et Z vaut 3 car il faut que l'exposant 3Z soit égal à 7, 8 ou 9 : cela fait 8 possibilités.
- Si $X+Y=2^4=16$, (X ; Y) peut valoir (7 ; 9), (8 ; 8) ou (9 ; 7) et Z vaut 2 car il faut que l'exposant 4Z soit égal à 7, 8 ou 9 : cela fait 3 possibilités.

Au total, il y a donc 21 entiers « XYZ » possibles.

25. Réponse **5.** Les sommes des chiffres de deux entiers naturels consécutifs diffèrent toujours de 1 sauf si le chiffre des unités du plus petit est 9. L'entier cherché n se termine donc par 9 et si x est le nombre de 9 par lequel il se termine, la somme de ses chiffres est égale à celle de $n+1$ augmentée de $9x-1$. Ainsi $9x-1$ doit être divisible par 7 et x doit donc valoir au moins 4. Parmi les nombres se terminant par 9999 et inférieur à 99999, il y a un et un seul nombre divisible par 7 ainsi que son suivant, c'est 69999 (et 70000). 69999 est donc le plus petit des nombres qui conviennent et est formé de 5 chiffres.

26. Réponse **3.** On doit obtenir 6000×100 en multipliant un nombre à deux chiffres (a) par un nombre à 4 chiffres (b).
Or $6000 \times 100 = 2^6 \times 3 \times 5^5$.
5×2^5 et 5×5^2 sont supérieurs à 100 donc à a. Donc, si a est multiple de 5, il ne l'est ni de 2^5 ni de 5^3 et par suite b serait multiple de 2^2 et 5^3 donc de 100 et ses deux derniers chiffres seraient 0. Les chiffres écrits devant être différents, a n'est donc pas multiple de 5.
Comme b est strictement inférieur à 10000, a doit être strictement supérieur à 60. Et si a n'est pas multiple de 5, a ne peut valoir que $3 \times 2^5 = 96$ ou $2^6 = 64$.
$a = 96$ donne $b = 2 \times 5^5 = 6250$ qui ne convient pas car le chiffre 6 serait utilisé deux fois.
$a = 64$ donne $b = 3 \times 5^5 = 9375$ qui convient et le chiffre cherché est 3.