KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une soixantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2016 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **B.** $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{1000}=\dfrac{100+10+1}{1000}=\dfrac{111}{1000}$.

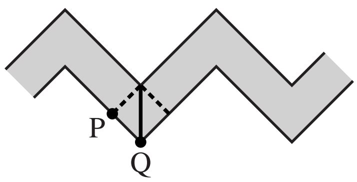
2. Réponse **E.** Le palindrome est RESSASSER.

3. Réponse **C.** Il faut 5 kg de figues fraîches pour faire 1 kg de figues sèches donc 25 kg de figues fraîches pour faire 5 kg de figues sèches.

4. Réponse **A.** Le dessin obtenu est le symétrique du premier dessin par rapport à la première bissectrice (d'équation $y=x$).

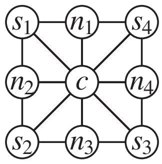
5. Réponse **C.** Le plus petite somme étant celle des âges de Tom et Jean, c'est Léo le plus âgé. On obtient le double de son âge en soustrayant la somme des âges de Tom et Jean des deux autres sommes : $25+24-23=26$. Léo, le plus âgé, a 13 ans.

6. Réponse **A.** La figure A ne peut pas représenter la rivière : sur la figure, le plus petit pont issu de Q sera $\sqrt{2}$ fois plus long que le plus petit pont issu de P.



7. Réponse **A.** $2015\times2017=(2016-1)\times(2016+1)=2016^2-1$.
Donc 2015×2017 et 2016×2016 sont des entiers consécutifs et il n'y a pas d'entier strictement compris entre 2015×2017 et 2016×2016.

8. Réponse **C.** Dans la figure ci-contre, on doit avoir $n_1 = n_2$ car chacun est au troisième sommet d'un triangle portant déjà c et s_1. De même $n_1 = n_4$ et $n_4 = n_3$, d'où $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$.



On a aussi $s_1 = s_2$ car chacun est au troisième sommet d'un triangle portant déjà c et n_2. Et de même $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$.
On a donc au maximum trois entiers différents écrits dans le diagramme (par exemple $c = 0$, $n_1 = 1$ et $s_1 = 2$).

9. Réponse **B.** Tous les morceaux étant de la même longueur, si n est le nombre de morceaux obtenus en découpant la corde de 1 m, le nombre de morceaux obtenus en découpant la corde de 2 m est $2n$. Le nombre total de morceaux est donc $3n$. Ce ne peut donc pas être 8 qui n'est pas multiple de 3.

10. Réponse **E.** On a $x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2+2}{x} = \dfrac{4x}{x} = 4$.

11. Réponse **A.** Le rapport des angles $\widehat{\mathrm{NOP}}$ et $\widehat{\mathrm{NOM}}$ est égal au rapport des longueurs des arcs $\overset{\frown}{\mathrm{NP}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{NM}}$. On a donc :

$\widehat{\mathrm{NOP}} = \dfrac{16}{20+16} \times 180° = 16 \times 5° = 80°$.

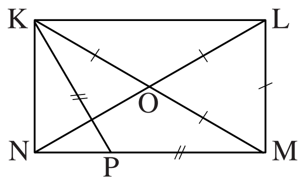
(XP) est tangente au cercle, d'où $\widehat{\mathrm{OPX}} = 90°$.
La somme des angles du triangle OPX valant 180° ; on a :

$\widehat{\mathrm{NOP}} + \widehat{\mathrm{OPX}} + \widehat{\mathrm{MXP}} = 180°$.

D'où $\widehat{\mathrm{MXP}} = 180° - 80° - 90° = 10°$.

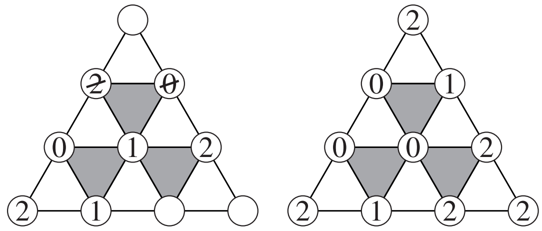
12. Réponse **D.** $b = a + 4$ donc $b > a$ et $b > 4$ (puisque $a > 0$).
$d = 2b - 4 = b + (b - 4)$ et puisque $b > 4$, $d > b$. D'où $d > b > a$.
$d = 4c$ (avec $c \geqslant 1$) donc $d > c$.
Le plus grand des quatre entiers est d.
(On peut avoir, par exemple, $a = 4$, $b = 8$, $c = 3$, $d = 12$.)

13. Réponse **E.** Soit O le centre du rectangle. Puisque $\mathrm{KM} = 2 \times \mathrm{LM}$, $\mathrm{OM} = \mathrm{LM}$. On a aussi $\mathrm{OM} = \mathrm{OL}$ donc OML est équilatéral et $\widehat{\mathrm{LMO}} = 60°$.
D'où $\widehat{\mathrm{KMP}} = \widehat{\mathrm{OMP}} = 30°$. Et comme KMP est isocèle en P, $\widehat{\mathrm{MKP}} = \widehat{\mathrm{KMP}} = 30°$.



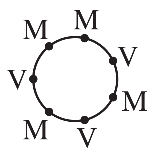
14. Réponse **C.** Dan a rencontré tous les autres, donc André n'a rencontré que Dan. Chris a donc rencontré Dan, Boris et Eugène et les deux que Boris a déjà rencontrés sont Dan et Chris. On conclut qu'Eugène a déjà rencontré 2 des amis (Dan et Chris) mais pas les autres (André et Boris).

15. Réponse **A.**
Le triangle blanc en bas à gauche se complète avec un 1. Alors le nombre central ne peut être que 1 ou 0 pour compléter correctement le triangle gris de gauche.

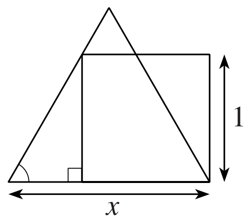


Si c'est 1, alors, d'après la propriété des triangles blancs, les nombres au-dessus doivent être 2 et 0 (voir figure). Mais alors le triangle gris du haut ne vérifie pas la condition voulue.
Le nombre central ne peut donc être que 0 et c'est possible comme indiqué sur la deuxième figure.

16. Réponse **B.** Deux véridiques ne pouvant être assis à côté, s'il y avait 4 véridiques (ou plus), il faudrait 4 menteurs (ou plus) pour les séparer. Comme il y a 7 lutins, il ne peut donc y avoir plus de 3 véridiques.
Et s'il y a 2 véridiques (ou moins), il y aurait nécessairement 3 menteurs côte à côte ce qui est impossible. Il ne peut donc y avoir que 3 véridiques et 4 menteurs et c'est possible comme montré ci-contre.



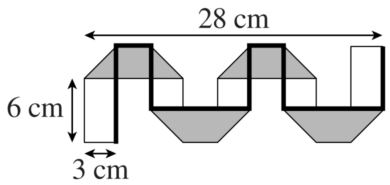
17. Réponse **D.** Le périmètre du carré étant 4, son côté est 1. Soit x le côté du triangle. L'angle du triangle équilatéral marqué sur la figure vaut 60° et on a :
$\tan(60°) = \dfrac{1}{x-1}$. D'où $x - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



$x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Le périmètre du triangle est $3x$ soit $3+\sqrt{3}$.

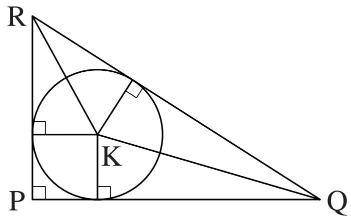
18. Réponse **A.** Soient x, y et z les trois nombres et X, Y et Z la somme de leurs chiffres. Un nombre a le même reste dans la division par 9 que la somme de ses chiffres, donc, par addition, $x+y+z$ a le même reste que $X+Y+Z$ dans la division par 9. Mais $X+Y+Z$ est multiple de 9 puisque égal à $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ qui vaut 45.
$x+y+z$ doit donc être multiple de 9 et ne peut donc pas être égal à 1500. On peut obtenir les autres nombres, par exemple, comme ceci :
$251+463+798=1512$, $251+374+896=1521$,
$214+375+986=1575$, $541+682+793=2016$.

19. Réponse **E.** On a repéré un bord de la bande initiale en trait épais sur la figure.



La longueur totale des segments « horizontaux » est $28 - 3$ soit 25 cm.
La longueur totale des segments « verticaux » est $9 + (6 \times 4)$ soit 33 cm.
La longueur de la bande est donc $25 + 33$ soit 58 cm.

20. Réponse **E.** K, point d'intersection de deux bissectrices, est le centre du cercle inscrit au triangle (la troisième bissectrice passe aussi par K). Le rayon du cercle inscrit est $\sqrt{8}$ et la distance KP est donc la diagonale d'un carré de côté $\sqrt{8}$. D'où $KP = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$.



21. Réponse **C.** $2016 = 56 \times 36$ donc chacun des 56 petits carrés a une aire de 36 et un côté de 6. Les rectangles possibles auront donc des côtés mesurés par des entiers (l'énoncé aurait pu ne pas le préciser) et leur nombre correspond aux rectangles différents faits avec 56 carrés identiques. $56 = 2^3 \times 7$ a huit diviseurs : $56 = 1 \times 56 = 2 \times 28 = 4 \times 14 = 7 \times 8$. Il y a donc 4 rectangles différents possibles.

22. Réponse **C.** Pour ces six pyramides, la base est une face du cube donc le volume est égal à la hauteur multipliée par un même nombre (le tiers de l'aire d'une face du cube). Or la somme des hauteurs de deux pyramides ayant des bases sur des faces opposées du cube est égale au côté du cube. Donc les trois sommes des volumes de deux pyramides "opposées" sont égales. La seule possibilité, avec les volumes donnés, d'avoir deux sommes de deux volumes égaux est $14 + 2 = 11 + 5 = 16$. Le volume de la sixième pyramide est donc $16 - 10$ soit 6.

23. Réponse **D.** L'égalité $(x^2 - 7x + 11)^{x^2 - 3x + 2} = 1$ ne peut être obtenue que dans les 3 cas suivants.

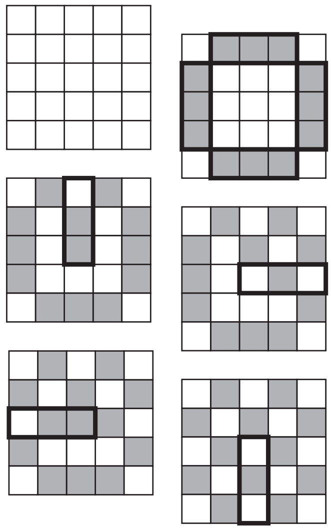
• 1[er] cas. $x^2 - 3x + 2 = 0$.
C'est-à-dire $(x - 1)(x - 2) = 0$.
Et, soit $x = 1$, avec $x^2 - 7x + 11 = 5$ et on a bien $5^0 = 1$.
Soit $x = 2$, avec $x^2 - 7x + 11 = 1$ et on a bien $1^0 = 1$.

• 2[e] cas. $x^2 - 7x + 11 = 1$.
C'est-à-dire $x^2 - 7x + 10 = 0$ ou $(x - 2)(x - 5) = 0$.
Et, soit $x = 2$ (vu au 1[er] cas), soit $x = 5$.

• 3[e] cas. $x^2 - 7x + 11 = -1$.
C'est-à-dire $x^2 - 7x + 12 = 0$ ou $(x - 3)(x - 4) = 0$.
Et, soit $x = 3$, et $x^2 - 3x + 2 = 2$ et on a bien $(-1)^2 = 1$.
Soit $x = 4$, et $x^2 - 3x + 2 = 6$ et on a bien $(-1)^6 = 1$.

Finalement, 5 nombres réels conviennent : 1, 2, 3, 4 et 5.

24. Réponse **A.** Les 12 cases qui doivent finir grises ne peuvent se griser que 2 par 2, il faudra donc au moins 6 mouvements.
Avec 6 mouvements seulement, un des mouvements devra concerner deux cases à griser d'un même côté extérieur (sinon il faudrait 8 mouvements) ; mais alors on ne pourra plus changer la troisième case grisée entre les deux autres.
En 7 mouvements c'est impossible car tout mouvement change la parité du nombre de cases grises (et il y en a 0 au début et 12 à la fin).
Le minimum est 8 mouvements, faisable comme montré ci-contre.



25. Réponse **9.** Soit n l'entier naturel considéré. Si n a six diviseurs alors, soit $n = a^5$ (avec a premier), soit $n = bc^2$ (avec b et c premiers distincts). Comme $648 = 2^3 \times 3^4$, la seule possibilité est $n = bc^2$ et les six diviseurs sont 1, b, c, c^2, bc et bc^2. Leur produit vaut b^3c^6, donc nécessairement $c = 3$ et $b = 2$. Et le sixième diviseur cherché est 3^2 soit 9.
(Rappel : le nombre de diviseurs d'un nombre naturel est le produit des exposants de ses facteurs premiers, chacun augmenté de 1.)

26. Réponse **2.** L'un des restes est strictement inférieur à 50, un autre à 60 et un autre à 70. La somme des restes est donc inférieure à $50 + 60 + 70$ soit 180 et $k < 180$.
On a aussi $k \geqslant 70$ car sinon le reste de k dans la division par 70 serait k et les autres restes ne seraient pas nuls tous les deux.
On peut remarquer que le chiffres de unités (u) de k est le chiffre des unités de chacun des trois restes et donc que $3u$ doit avoir u comme chiffre des unités. Ce qui implique $u = 0$ ou $u = 5$. On a alors à tester de 5 en 5 les entiers de 70 à 175. On peut aussi chercher selon les restes possibles :
Si $70 \leqslant k < 100$, $k = (k-50) + (k-60) + (k-70)$ et $k = 90$.
Si $100 \leqslant k < 120$, $k = (k-100) + (k-60) + (k-70)$ et $k = 115$.
Si $120 \leqslant k < 140$, $k = (k-100) + (k-120) + (k-70)$ et $k = 145$, absurde.
Si $140 \leqslant k < 150$, $k = (k-100) + (k-120) + (k-140)$ et $k = 180$, absurde.
Si $150 \leqslant k < 180$, $k = (k-150) + (k-120) + (k-140)$ et $k = 205$, absurde.
Finalement, seuls 2 entiers conviennent : 90 et 115.