KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions et demi de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une soixantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

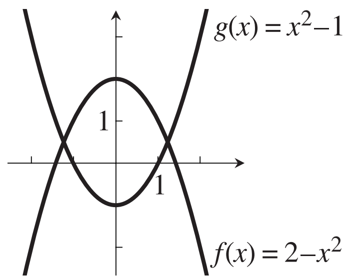
Kangourou 2015 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **E.** La somme des trois nombres est 2015×3, soit 6045. $6045 - 2000 - 15 = 4030$. Le troisième nombre est 4030.

2. Réponse **D.** L'effectif le plus nombreux, en gris, est inférieur à la somme des deux autres donc les diagrammes B et C ne conviennent pas. L'effectif en noir est inférieur à la moitié de chacun des deux autres donc au cinquième du total : les diagrammes A et E ne conviennent pas. C'est le diagramme D qui correspond à l'histogramme dessiné.

3. Réponse **E.** La différence d'âges des deux sœurs peut être toute valeur entre 3 ans et 1 jour et 5 ans moins 1 jour (la plus petite valeur correspond aux 31 décembre 1997 et 1er janvier 2001 ; la plus grande aux 1er janvier 1997 et 31 décembre 2001). Elle peut donc être inférieure, égale ou supérieure à 4 ans mais est toujours supérieure à 3 ans.

4. Réponse **C.** Les deux courbes sont des paraboles de même axe (l'axe des ordonnées), de directions opposées et se coupent ; l'une ayant pour sommet $(0 ; -1)$ et l'autre $(0 ; 2)$.
Elles partagent le plan en 5 régions (voir figure).



5. Réponse **B.** Le patron B ne permet pas de faire une pyramide : aucun côté de triangle ne peut s'accoler au côté droit du carré. Par contre, chacun des quatre autres patrons permet bien de faire une pyramide par pliage.

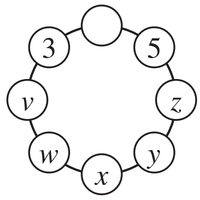
6. Réponse **A.** $2015^2 - 2005^2 = (2015+2005)\,(2015-2005)$
$= 4020 \times 10 = 40200 = 201 \times 200.$
Le nombre donné vaut donc 1.

7. Réponse **B.** Si x, y et z sont les côtés du triangle rectangle correspondant respectivement aux diamètres des demi-disques d'aires X, Y et Z, on a $x^2+y^2=z^2$. L'aire d'un disque étant proportionnelle au carré de son rayon, les aires X, Y et Z sont proportionnelles à x^2, y^2 et z^2. Et donc $X+Y=Z$.

8. Réponse **D.** Soit S la somme des 31 entiers de 2001 à 2031 et T la somme des entiers de 1 à 31. On a $S=2000\times 31+T$ et $T=\dfrac{32\times 31}{2}$
D'où $S=(2000\times 31)+(16\times 31)=2016\times 31$.
Le quotient de S par 31 est 2016.
(Remarque : 2016 est la moyenne des 31 entiers de 2001 à 2013.)

9. Réponse **A.** $2^{2x}=4^x$ ne peut être égal à 4^{x+1} sinon on aurait aussi $x=x+1$. L'équation proposée n'a pas de solution.

10. Réponse **E.** Appelons v, w, x, y et z les nombres dans les cinq disques entre 3 et 5 (voir figure). On doit avoir $v=3+w$ et $w=v+x$.
D'où $x=w-v=w-(3+w)=-3$.
On doit aussi avoir $z=5+y$ et $y=z+x$.
D'où $x=y-z=y-(5+y)=-5$.
x ne pouvant valoir à la fois -3 et -5, la situation est impossible.



11. Réponse **C.** Les cinq entiers étant strictement positifs, comme $a+b=d$, alors $a<d$ et $b<d$. Comme $e-d=a$, alors $d<e$. Les entiers étant différents, b étant égal à $\frac{c}{e}$ ne peut valoir 1 et donc $b \geqslant 2$. De plus $c \geqslant 2e > e$. Finalement $c>e>d$ avec $d>a$ et $d>b$. Le plus grands des cinq entiers est c.
(On peut avoir par exemple $a=1$, $b=2$, $d=3$, $e=4$, $c=8$.)

12. Réponse **B.** Il y a 36 cas possibles de lancers des deux dés de Jana et de Fabien : si Jana fait 2, il y a 3 cas où elle gagne (lorsque Fabien fait 1) et si Jana fait 5 il y a 3 fois 4 cas où elle gagne (lorsque Fabien fait 1, 2, 3 ou 4). Elle gagne donc dans $3+3\times 4$, soit 15 cas.
Et la probabilité que Jana gagne est $\frac{15}{36}$, soit $\frac{5}{12}$.

13. Réponse **A.** Les aires de chacun des deux anneaux sont égales à l'aire du petit disque (puisque les aires grises sont égales et sont celles du quart de chacun des deux anneaux ou du quart du petit disque). Cette aire est égale à π (aire d'un disque de rayon 1).
Les aires des deux plus grands disques sont donc 2π et 3π et leurs rayons $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Et le produit des trois rayons est donc $1 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, soit $\sqrt{6}$.

14. Réponse **A.** Faisons tourner le premier dé pour mettre la face 1 en dessous (comme elle l'est pour le deuxième dé, opposée à la face 6), la face 3 restant à gauche et la face 2 passant devant.
Puis, faisons tourner ce même dé, la face 1 restant en dessous, pour amener la face 3 derrière (comme elle l'est pour le deuxième dé, opposée à la face 4) ; la face 2 vient alors à gauche.
Les deux dés identiques sont alors dans la même position et la face 5 est à droite.

15. Réponse **D.** L'affirmation E est vraie. Donc l'affirmation C, qui contredit E, est fausse. Donc A est fausse. Donc B est fausse. Et alors D est vraie. Les affirmations vraies sont donc D et E. La première vraie dans le sens de lecture est D.

16. Réponse **C.** De 2000 à 2015, la plus grande somme des chiffres est 11 obtenue pour 2009. Pour les nombres entre 1 et 1999, chaque chiffre (unités, dizaines, centaines et milliers) de 1999 est le maximum possible, donc la somme maximale est obtenue pour 1999 et c'est 28. Toutes les autres sommes peuvent être obtenues en diminuant les chiffres (1998, 1997, … , 1990, 1980, 1970, … , 1900, 1800, 1700, … , 1000). Finalement il y a 28 sommes possibles (de 1 à 28) et donc 28 couleurs différentes.

17. Réponse **B.** Si les coordonnées $(x ; y)$ d'un point vérifient l'équation, alors les coordonnées $(x ; -y)$ vérifient aussi l'équation. L'axe des x est donc un axe de symétrie de la courbe représentative considérée. L'axe des x ne peut donc être que d. Et l'axe des y, perpendiculaire à l'axe des x, est donc l'axe b.

18. Réponse **C.** Soient x le prix d'achat de la sculpture et y celui du tableau. Leurs prix de vente sont $1{,}4\,x$ et $1{,}6\,y$ dont la somme doit être égale à $1{,}54\,(x+y)$. Ce qui donne $1{,}4\,x + 1{,}6\,y = 1{,}54\,(x+y)$ soit $(1{,}54 - 1{,}4)\dfrac{x}{y} = 1{,}6 - 1{,}54$ d'où $0{,}14\dfrac{x}{y} = 0{,}06$ et $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$.

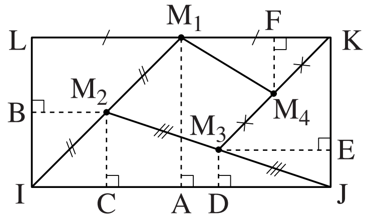
19. Réponse **E.** $n = 11$, $n = 19$ et $n = 29$ vérifient « un et un seul des entiers $n-2$ et $n+2$ est premier » donc ne contredisent pas l'affirmation. Le nombre 21 n'étant pas premier ne peut contredire une affirmation sur les nombres premiers.
37 est premier alors que ni 35, égal à 7×5, ni 39 égal à 13×3, ne sont premiers ; c'est un contre-exemple à l'affirmation donnée.

20. Réponse **D.** $2015 = 5 \times 403 = 5 \times 13 \times 31$. Le produit des trois nombres premiers 5, 13 et 31 doit être le produit de deux âges. Comme 31×5 et 31×13 sont trop grands pour être l'âge d'une personne, c'est que les âges sont 31 et 5×13, soit 31 et 65.
La différence entre les deux est $65 - 31$, soit 34.

21. Réponse **C.** En prenant $x = 5$, on a $f(5) + 2f(403) = 20$.
En prenant $x = 403$, on a $f(403) + 2f(5) = 1612$.
En soustrayant la première égalité à deux fois la seconde, on obtient :
$3f(5) = 3224 - 20$.
D'où $f(5) = \dfrac{3204}{3} = 1068$.
Remarque : cette fonction existe bien et est telle que $f(x) = \dfrac{16120}{3x} - \dfrac{4}{3}x$.

22. Réponse **B.** Soit P le produit des 10 nombres réels. Si l'un d'entre d'eux, x, est le produit des neuf autres, alors $P = x \times x$. L'équation $x^2 = P$ ayant au plus 2 solutions, il y a au plus 2 nombres soulignés.
Il est possible d'avoir 2 nombres soulignés, par exemple 1 et -1 avec $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$, 2, 3, 4 et -5, le maximum cherché est donc 2.

23. Réponse **C.** Soit R l'aire du rectangle IJKL. On considère les points A, B, C, D, E et F indiqués sur la figure ci-contre.



L'**aire du triangle LM_1I** est :
$\dfrac{1}{2} LI \times LM_1 = \dfrac{1}{4} LI \times LK = \dfrac{R}{4}$.
M_2 est le milieu de $[M_1I]$, donc B est le milieu de [LI].
L'**aire du triangle IM_2J** est : $\dfrac{1}{2} IJ \times M_2C = \dfrac{1}{2} IJ \times BI = \dfrac{R}{4}$.
M_2 est le milieu de $[M_1I]$, donc C est le milieu de [AI] et $JC = \dfrac{3}{4} JI$.
M_3 est le milieu de $[M_2J]$, donc D est le milieu de [CJ] et $JD = \dfrac{3}{8} JI$.
L'**aire du triangle JM_3K** est : $\dfrac{1}{2} JK \times EM_3 = \dfrac{1}{2} JK \times JD = \dfrac{3}{16} R$.
M_4 est le milieu de $[M_3K]$, donc $FM_4 = \dfrac{1}{2} KE$;
or $EJ = M_3D = \dfrac{1}{2} M_2C = \dfrac{1}{4} KJ$; donc $KE = \dfrac{3}{4} KJ$ et $FM_4 = \dfrac{3}{8} KJ$.
L'**aire du triangle KM_4M_1** est : $\dfrac{1}{2} M_1K \times FM_4 = \dfrac{1}{4} LK \times \dfrac{3}{8} KJ = \dfrac{3}{32} R$.
En soustrayant à l'aire d'IJKL les aires des quatre triangles LM_1I, IM_2J, JM_3K, et KM_4M_1, on obtient l'aire du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$.
Elle est égale à $R - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{32}\right) R$ soit $\dfrac{7}{32} R$.

24. Réponse **B.** Soit C_R le nombre de carrés rouges, N_R le nombre de rectangles rouges non carrés, C_B le nombre de carrés bleus et N_B le nombre de rectangles bleus non carrés. On sait que :

$$C_R + C_B = 7 \quad (i)$$
$$C_R + N_R = C_B + 3 \quad (ii)$$
$$C_R = N_B + C_B + 2 \quad (iii)$$

Si $C_R > 5$ alors $C_B < 2$ (par *i*) et alors $C_R < 5$ (par *ii*). Donc $C_R \leqslant 5$.
Si $C_R < 5$ alors $C_B < 3$ (par *iii*) et alors $C_R > 4$ (par *i*). Donc $C_R \geqslant 5$.
On en déduit : $C_R = 5$. Et $C_B = 2$, $N_R = 0$ (tous les rectangles rouges sont des carrés), $N_B = 1$.
Le nombre de rectangles bleus est $C_B + N_B$, soit 3.

25. Réponse **4.** Pour un entier n, la moyenne des nombres restants sera minimale si on écarte le nombre n.
Il restera alors $n-1$ nombres de somme $\frac{n(n-1)}{2}$ et de moyenne $\frac{n}{2}$.
On doit donc avoir $\frac{n}{2} \leqslant 8{,}8$ et comme n est entier : $n \leqslant 17$.
Pour un entier n, la moyenne des nombres restants sera maximale si on écarte 1 au lieu de n. Elle est alors égale à $\frac{n}{2} + \frac{-1+n}{n-1}$, soit $\frac{n}{2} + 1$.
Et donc $\frac{n}{2} + 1 \geqslant 8{,}8$ soit $\frac{n}{2} \geqslant 7{,}8$ et comme n est entier : $n \geqslant 16$.
L'entier n ne peut donc valoir que 16 ou 17. Mais la somme des $n-1$ nombres entiers de moyenne 8,8 doit être entière. Comme $16 \times 8{,}8$ n'est pas entier, $n = 17$ ne convient pas. Donc $n = 16$ et les 15 nombres restants ont pour somme $15 \times 8{,}8 = 132$.
Comme la somme des nombres de 1 à 16 est 136, le nombre écarté est $136 - 132$ soit 4.

26. Réponse **4.** Soit h la longueur de l'hypoténuse du triangle et x la longueur de [BC]. D'après le théorème de Pythagore, on a $h^2 = x^2 + 20^2$.
D'où $(h+x)(h-x) = 400$. Les entiers $a = h + x$ et $b = h - x$ ayant même parité et pour produit 400 sont tous les deux pairs. On cherche donc les couples d'entiers pairs $(a\,;b)$ tels que $ab = 400$ et $a > b$.
On a $400 = 2^4 \times 5^2$. Les couples $(1\,;400)$, $(5\,;80)$, $(16\,;25)$ et $(20\,;20)$ ne conviennent pas. Tous les couples possibles sont donc $(2\,;200)$, $(4\,;100)$, $(8\,;50)$ et $(10\,;40)$. Ces 4 couples correspondent respectivement aux triangles d'hypoténuse de longueur 101 et de côtés 99 et 20,
d'hypoténuse de longueur 52 et de côtés 48 et 20,
d'hypoténuse de longueur 29 et de côtés 21 et 20,
d'hypoténuse de longueur 25 et de côtés 15 et 20.
Le nombre de triangles rectangles cherchés est donc 4.