KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions et demi de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une soixantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

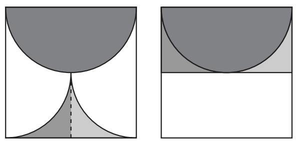
Kangourou 2015 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse **B.** Le produit donné est de l'ordre de 20×50, soit 1000 et loin de 10 fois plus ou 10 fois moins.

2. Réponse **D.** Dans le diagramme circulaire, l'aire du secteur gris est plus grande que celle du secteur blanc, elle-même supérieure à celle du secteur noir. La bonne réponse ne peut donc être que A ou D. Et c'est D car la somme des aires blanches et noires doit être supérieure à la grise.

3. Réponse **E.** Dans les 29 pièces alignées, il y a un cube de plus que de cylindres. $29 = 15 + 14$. Il y a 15 cubes.

4. Réponse **E.** Les quarts de cercle ont même rayon que le demi-cercle (leur rayon est la moitié du côté du carré). Le dessin de droite montre que l'aire grisée est la moitié de l'aire du carré.



5. Réponse **B.** Le total payé est $80 + 50 + 20$ soit 150 centimes. Anne a payé $\frac{80}{150}$ soit $\frac{8}{15}$ du total et elle aurait eu, avec une répartition proportionnelle, $\frac{8}{15} \times 30$ soit 16 gâteaux.

6. Réponse **C.** Avec le patron de cube erroné de Foufou, il y a deux faces opposées à la face du carré 7 : les carrés 2 et 3 qui se superposeraient après pliage. Pour obtenir un patron de cube correct d'un seul morceau, c'est le carré 3 qu'il faut enlever.

7. Réponse **E.** Le nombre d'élèves ayant choisi une seule des deux matières et $33 - 3$, soit 30. Parmi ces 30 élèves, 20 ont choisi l'informatique et 10 le théâtre. Au total, $20 + 3$, soit 23 élèves, ont choisi l'informatique.

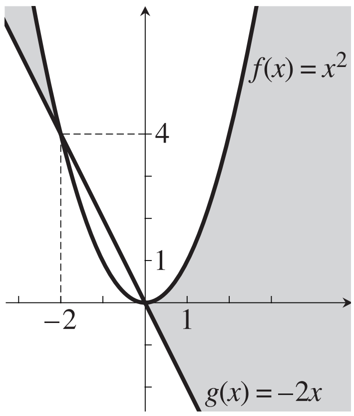
8. Réponse **A.** Comme $h^{17}=-(-h)^{17}$, $f(h)+f(-h)=-2-2=-4$.
Donc $f(-h)=-4-f(h)=-4-(-2015)=2011$.

9. Réponse **E.** Le trésor étant au plus à 5 m du poirier, est dans un disque de rayon 5 m centré sur le poirier. Mais le trésor est aussi au moins à 5 m de la haie, ce qui exclut, du côté du poirier, une bande de terrain de 5 m de large délimitée par la haie et une parallèle à la haie. La bonne figure est donc la E.

10. Réponse **D.** Les 4 entiers sont tels que $0 < W < X < Y < Z \leqslant 9$.
Le nombre « XZ » est égal à $10X + Z$. Et « WY » à $10W + Y$.
Comme $X > W$, « XZ » est supérieur à « WY » et leur différence est $10(X-W) + Z - Y$.
La plus grande valeur de X possible est $X=7$. Alors nécessairement $Y=8$ et $Z=9$. Et la différence sera maximale pour W le plus petit possible soit $W=1$; et elle sera $10\times(7-1) + 9 - 8 = 61$.
Si $X < 7$, alors $X - W < 6$, et la différence est inférieure à 60.
Le maximum de la différence cherchée est donc 61.

11. Réponse **C.** Il faut se déplacer de 4 unités vers la droite et de 2 vers le bas. La distance minimale correspond à deux côtés et deux diagonales de petit carré. Une diagonale de carré de côté 1 valant $\sqrt{2}$, la distance minimale à parcourir est $2+2\sqrt{2}$.

12. Réponse **C.** La parabole représentant $f(x)=x^2$ et la droite représentant $g(x)=-2x$ se coupent aux points $(0\,;0)$ et $(-2\,;4)$.
Elles sont tracées sur la figure ci-contre (notez qu'un dessin très précis n'est pas vraiment nécessaire).
Elles partagent le plan en 5 régions : une région fermée et 4 régions ouvertes.



13. Réponse **A.** $5^{12}=(5^6)^2$. $4^{11}=(2^2)^{11}=(2^{11})^2$. $3^{10}=(3^5)^2$. $2^9=(2^3)^3$.
Les entiers B, C et D sont donc des carrés et E est un cube (remarque : B est aussi un cube). La seule proposition qui n'est ni le carré ni le cube d'un entier est 6^{13}, égal à $2^{13}\times 3^{13}$.

14. Réponse **D.** Avec les restes des 100 bougies de la boîte, comme $100 = 7 \times 14 + 2$, Kangourou pourra faire 14 nouvelles bougies. Ces 14 bougies consumées, il aura $2 + 14$, soit 16 restes, avec lesquels il fera 2 bougies. Il ne lui restera alors que 4 restes qui ne suffisent pas pour faire une bougie entière. Finalement, Kangourou pourra allumer une bougie entière pendant $100 + 14 + 2$, soit 116 soirs.

15. Réponse **A.** Les trois positions du dé indiquent que le dé a au moins 2 faces « Oui », 2 faces « Non» et une face « Peut-être ».
S'il n'y avait que deux « Oui », alors la troisième position serait incompatible avec le dé de la deuxième position : étant donné le sens d'écriture du « Oui », il devrait y avoir « Peut-être » à la place d'un des deux « Non».
Il y a donc 3 faces « Oui » et la probabilité d'obtenir « Oui » est $\frac{1}{2}$.

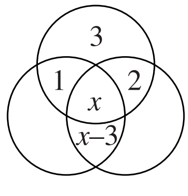
16. Réponse **C.** Les nombres d'antennes de RK1, RK2 et RK3 étant respectivement x, y et z, on a : $y + z = 8$, $x + z = 7$ et $x + y = 5$.
Membre à membre, en ajoutant les deux premières égalités et en soustrayant la troisième, on obtient : $2z = 8 + 7 - 5$; donc $2z = 10$ et $z = 5$. RK3 a 5 antennes.

17. Réponse **B.** La valeur minimale de h s'obtient lorsque, une fois le cube dans l'eau, l'eau est montée juste à la hauteur du cube ; alors le volume de l'eau et du cube ensemble est, en cm^3, $10 \times 10 \times 2$, soit 200. Comme, en cm^3, le volume du cube est 2^3, le volume de l'eau est alors $200 - 8$, soit 192. Ce volume correspond à un parallélépipède d'eau de dimensions $10 \times 10 \times h$. On a donc $h = 1{,}92$ cm.

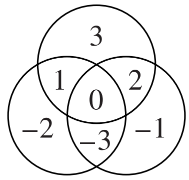
18. Réponse **B.** Le côté du carré WXYZ d'aire 16 vaut 4.
Avec $\text{WX} = 4$ et $\text{WS} = 3\,\text{SX}$, on a donc $\text{WS} = 3$ et $\text{SX} = 1$.
Par la rotation r d'un quart de tour de centre le centre du carré, on a $r(\text{W}) = \text{X}$, $r(\text{X}) = \text{Y}$, $r(\text{Y}) = \text{Z}$ et $r(\text{Z}) = \text{W}$, d'où aussi $r(\text{V}) = \text{S}$, $r(\text{S}) = \text{T}$, $r(\text{T}) = \text{U}$ et $r(\text{U}) = \text{V}$. VSTU est donc un carré et son aire vaut VS^2.
On a alors, par Pythagore : $\text{VS}^2 = \text{WS}^2 + \text{WV}^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.
L'aire de la partie grisée est la moitié de l'aire du carré VSTU, soit 5.

19. Réponse **B.** Chacune des réponses des cinq élèves contredisant les 4 autres, au plus un élève peut dire la vérité et avoir été présent au lycée la veille. Luc en disant « aucun » ne peut pas dire la vérité. 1 seul élève était donc au lycée hier et c'est Marc qui est seul à dire la vérité.

20. Réponse **A.** Le nombre écrit dans la région du haut est $1 + 2$, soit 3 (voir figure ci-contre).
Soit x le nombre de la région centrale. Alors, celui de la région juste en dessous, qui ajouté à 1 et 2 doit donner x, est $x - 3$.

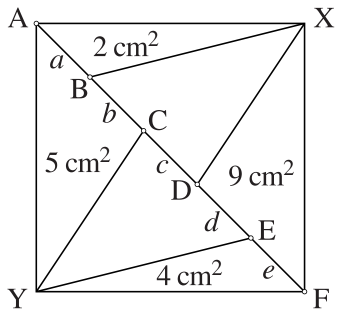


Et celui de la grande région de gauche est, par addition des nombres de ses trois régions voisines, $1+x+(x-3)$, soit $2x-2$.
Alors, pour la région où 1 est écrit, on a :
$(2x-2)+x+3=1$, d'où $3x=0$ et $x=0$.
La figure avec les 7 nombres est donnée ci-contre.



21. Réponse **B.** Soit m la moyenne des candidats ayant échoué.
$(0{,}7\times 23)+(0{,}3\times m)=20$. D'où $3m=200-161=39$ et $m=13$.

22. Réponse **D.** Avec les notations données par la figure ci-contre, les aires étant exprimées en cm^2 :

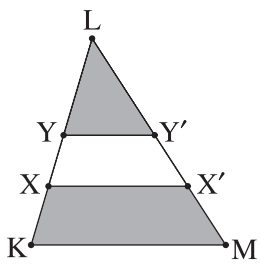


- ABX a pour aire 2 (et ABY aussi);
- BCY a pour aire $5-2$, soit 3 ;
- EFY a pour aire 4 (et EFX aussi) ;
- DEX a pour aire $9-4$, soit 5 ;
- L'aire de CDX est l'aire d'un demi-carré (qui vaut 15) moins les aires de ABX (2), BCX (3 comme BCY), DEX (5) et EFX (4). $15-2-3-5-4=1$.

L'aire de CDX est 1.
Les triangles ABX, BCX, CDX, DEX et EFX de bases respectives a, b, c, d et e, ont la même hauteur (égale à la moitié de la diagonale du carré), les bases se rangent donc dans le même ordre que les aires.
Les aires étant respectivement 2, 3, 1, 5 et 4, on a $c<a<b<e<d$.
d est le morceau de diagonale le plus long.

23. Réponse **B.** La somme des entiers de 1 à 10 est 55 et en écartant un des nombres, la somme sera supérieure ou égale à 45 et la moyenne supérieure ou égale à 5. On a donc $n<10$.
Le produit du nombre de nombres restants $(n-1)$ et de la moyenne (4,75) doit être un entier : les seules possibilités, entre 1 et 10, sont $n-1=4$ ou $n-1=8$.
Le premier cas, $n=5$, ne convient pas : la moyenne des deux plus grands entiers (4 et 5) est déjà inférieure à 4,75. On a donc $n=9$ et l'entier k à écarter est tel que $\dfrac{45-k}{8}=4{,}75$. D'où $45-k=38$. $k=7$.

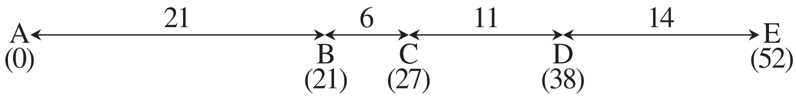
24. Réponse **D.** Appelons X′ et Y′ les points d'intersection de (LM) avec les parallèles (voir figure).



$\mathrm{LX}=4\,\mathrm{XK}=4\,(\mathrm{LK}-\mathrm{LX})$, donc $\dfrac{\mathrm{LX}}{\mathrm{LK}}=\dfrac{4}{5}$.
LXX′ est une réduction du triangle LKM et le coefficient de réduction est $\dfrac{4}{5}$ donc
$\mathrm{Aire(LXX')}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\mathrm{Aire(LKM)}$.

Les aires grisées étant égales, on a Aire(LYY′) = Aire(LKM) – Aire(LXX′).
D'où Aire(LYY′) = Aire(LKM) $-\dfrac{16}{25}$ Aire(LKM) $=\dfrac{9}{25}$ Aire(LKM).
LYY′ est une réduction du triangle LKM et le coefficient de réduction est $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ soit $\dfrac{3}{5}$.
On a donc $\dfrac{LY}{LK}=\dfrac{3}{5}$. D'où $5\,LY = 3\,LK = 3\,(LY + YK)$ et $2\,LY = 3\,YK$.
$\dfrac{LY}{YK}=\dfrac{3}{2}$.

25. Réponse **6.** Plaçons les 5 points sur un axe gradué en plaçant d'abord les deux points les plus éloignés : A d'abscisse 0 et E d'abscisse 52.
Après 52, la plus grande distance est 38, ainsi un 3$^{\text{ème}}$ point doit avoir pour abscisse 38 ou 14 ; les cas étant symétriques, choisissons D (38).
Pour les deux derniers points, la somme des deux distances aux points extrêmes doit valoir 52, l'une valant plus de 26 et moins de 38 : les distances sont donc 31 et 21 pour un point (B), 27 et 25 pour l'autre (C).
C ne peut pas être à 25 de A car il serait à 13 de D (et 13 n'est pas dans la liste des distances) ; C a donc pour abscisse 27.
Alors l'abscisse de B ne peut pas être 31 car B serait à 7 de D et à 31 – 27 soit 4 de C ; c'est donc 21. Et la distance entre B et C est $k = 6$.
Voici comment sont alors placés les points :



26. Réponse **4.** La fourmi doit faire un circuit passant par chacun des 8 sommets. Chaque sommet est l'extrémités de 3 arêtes, la fourmi doit donc y faire deux passages et parcourir au moins deux fois l'une des trois arêtes. Pour les 8 sommets (joints deux à deux par une arête), il faudra donc parcourir deux fois au moins 4 arêtes.
Et on peut facilement trouver un circuit empruntant une fois chaque arête, sauf quatre, parcourues deux fois :