

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)

Tél. : 01 43 31 40 30

www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions et demi de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une soixantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2014 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse **B**. $\frac{x}{y} + 1 = 0$. Et $\frac{x}{y} = -1$.

2. Réponse **D**. La somme des longueurs du rectangle est égale au périmètre du carré et la somme de ses largeurs au côté du carré.

Le périmètre du rectangle est donc $\frac{5}{4}$ de celui du carré soit 80 cm.

3. Réponse **C**. La moyenne de 1 et 3 est 2.

La moyenne de $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ est donc $\frac{2}{10}$ soit $\frac{1}{5}$.

4. Réponse **E**. $a < b$ car le diamètre est plus court que le demi-cercle. $c < a$ car l'hypoténuse est plus courte que la somme des 2 autres côtés. D'où $c < a < b$.

5. Réponse **B**. Après avoir divisé par 11×111 , cela revient à comparer 4×7 (28), 5×6 (30), 7×4 (28), 8×3 (24) et 9×2 (18). Des cinq calculs, c'est donc 55×666 qui donne le résultat le plus grand.

6. Réponse **D**. Il n'y a qu'une façon d'avoir un total de 2 : il faut obtenir 1 avec le premier dé et 1 avec le deuxième dé.

La probabilité est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ soit $\frac{1}{36}$.

7. Réponse **B**. Pour que le Kangourou ait lieu au plus tôt, il faut que le mois de mars commence un jeudi. Les trois premiers jeudis seront alors le 1^{er}, le 8 et le 15 mars.

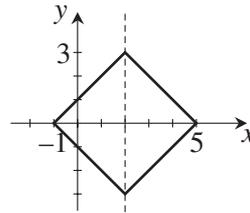
Kangourou 2014 - Corrigé du sujet « J »

8. Réponse A. 75 km c'est 75 000 m, et $75\,000 = 12\,500 \times 6$.
La longueur d'un conteneur est 6 m.

9. Réponse A. f étant affine, $f(4) - f(3) = f(3) - f(2) = 9 - 4 = 5$.
D'où $f(4) = 14$.

10. Réponse A. Les côtés de l'hexagone régulier étant multipliés par 2, l'aire est multipliée par 2^2 soit 4.
L'aire du grand hexagone vaut $4 \times 4 \text{ cm}^2$, soit 16 cm^2 .

11. Réponse B. Une diagonale est portée par le premier axe de coordonnées.
L'autre est donc parallèle au deuxième axe ; elle a pour milieu le point $(2; 0)$ et pour longueur 6. Les deux autres sommets sont donc $(2; -3)$ et $(2; 3)$.

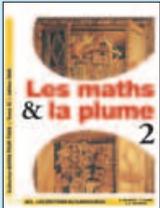


12. Réponse C. L'unique décomposition de 100 en somme de trois puissances de 2 est $100 = 64 + 32 + 4$. La grand-mère a 64 ans, la mère 32 ans et la petite-fille 4 ans.

13. Réponse E. $2b + 2 = 2(b + 1)$.
 $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$.
 $b^2 + b = b(b + 1)$.
 $-1 - b = (-1)(b + 1)$.

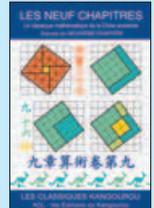
On ne peut pas mettre $(b + 1)$ en facteur dans $b^2 + 1$ car alors (-1) serait solution de $b^2 + 1 = 0$, or $(-1)^2 + 1 = 2$.

14. Réponse B. Le temps total d'occupation nécessaire est 96 minutes
On aurait le temps minimum si chacune des deux salles pouvaient être occupée 48 minutes mais cela est impossible avec les six temps proposés. Par contre il est possible de faire un partage en 47 et 49 minutes d'occupation : $23 + 13 + 11 = 47$ et $22 + 18 + 9 = 49$. Puisque l'heure de début est 7 h, l'heure de fin est 7:49.



Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :
<http://www.mathkang.org/catalogue/>

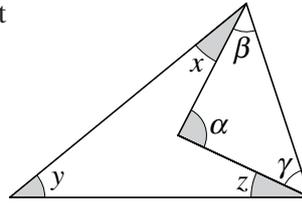


15. Réponse D. En rajoutant un segment sur la figure, on obtient deux triangles.

On a : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
 et $y + (x + \beta) + (z + \gamma) = 180^\circ$.

Donc :

$$\alpha = x + y + z = 22^\circ + 39^\circ + 23^\circ = 84^\circ.$$



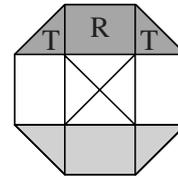
16. Réponse E. Pauline a couru d'abord 2 h, puis elle a parcouru une distance $8t$ (en km) en un temps t (en heure). Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet étant 5 km/h, on a : $8 + 8t = 5(2 + t)$.

D'où $3t = 2$ soit $t = \frac{2}{3}$ en heure, soit 40 minutes.

17. Réponse C. L'octogone peut être découpé en 3 parties : celle grisée, la symétrique de la partie grisée par rapport au centre et un rectangle.

L'aire de ce rectangle « central » vaut 2 fois l'aires grisée : en effet, comme le montre la figure ci contre, la partie grisée contient un rectangle R et deux triangles rectangles T identiques tandis que le rectangle central contient 2 rectangles R et 4 triangles T.

L'aire de l'octogone est donc égale à 4 fois l'aire grisée, soit à 12 cm^2 .



18. Réponse D. Si Lisa et Marie avaient résolu les mêmes problèmes, elles auraient ensemble $60 \times (4 + 1)$, soit 300 points.

À chaque fois qu'elles résolvent 2 problèmes différents plutôt que 2 fois le même, elles gagnent 3 points (8 points au lieu de 5).

Pour gagner 12 points (312 points au lieu de 300), elles ont donc 4 fois résolus des exercices différents. Donc, sur les 60 problèmes résolus par chacune, 56 ont été résolus à la fois par Marie et Lisa.

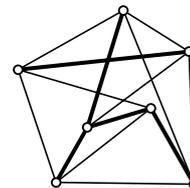
Remarque : on a bien $(56 \times 5) + (4 \times 8) = 312$.

19. Réponse D. Un segment reliant 2 points, le nombre de segments d'une figure d'où partent n segments par point est égal à la moitié de $n \times 7$. n doit donc être pair.

Il y a déjà 3 segments partant d'un des gros points, on ne pourra donc pas trouver mieux qu'une figure avec 4 segments par points.

Une figure (et mêmes plusieurs) avec 4 segments par points est possible (voir ci-contre) et correspond donc au minimum cherché.

Il y a alors 14 segments au total : 5 initiaux et 9 rajoutés.



20. Réponse C. Le tableau C est plus près du sol que B (seule la hauteur des tableaux diffère). De même, E est plus près du sol que D. Pour chacun des tableaux A, C et E, on calcule d'abord la distance verticale entre le clou et le haut du tableau : c'est le côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est 1 m (la moitié de la longueur de la ficelle) et un autre côté est la moitié de la dimension horizontale du tableau. En y ajoutant la hauteur du tableau, on obtient la distance du clou au bas du tableau (les calculs sont faits en dm) :

- pour A, $\sqrt{10^2 - 3^2} + 4$ qui est inférieur à 14 ;

- pour C, $\sqrt{10^2 - 6^2} + 9 = 8 + 9 = 17$;

- pour E, $\sqrt{10^2 - 8^2} + 10 = 6 + 10 = 16$.

Le tableau qui s'approche le plus du sol est celui pour lequel cette distance est la plus grande, c'est C.

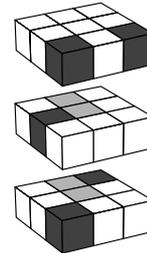
21. Réponse D. Soit p le prix initial d'un chapeau (en euros).

Le problème se traduit par l'équation : $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right)p = 3(p - 9,4)$.

Alors : $\left(\frac{40 + 45 + 48}{60}\right)p = 3(p - 9,4)$. $133p = 3 \times 60 \times (p - 9,4)$.

Et $47p = 3 \times 6 \times 94$. $p = 3 \times 6 \times 2 = 36$.

22. Réponse D. Sur une vue on voit 4 sommets blancs et sur une autre 4 sommets noirs. On connaît donc les couleurs des 8 sommets du cube. De plus une seule face a 3 sommets noirs : on en conclut que les faces du haut et du bas de chacune des vues sont les mêmes et que le cube a été tourné d'un quart de tour entre une vue et l'autre.



Sur le dessin ci-contre où le cube est découpé en tranches, les cubes blancs et les 5 cubes noirs sont visibles sur l'une ou les deux vues de l'énoncé et les 4 cubes en gris ne sont visibles sur aucune des deux vues. Le cube peut donc contenir, au plus, $5 + 4$, soit 9 cubes noirs.

23. Réponse B. Soient b le nombre initial de grenouilles bleues et v le nombre initial de grenouilles vertes.

Alors le nombre final de grenouilles bleues est $1,6b$ et celui de vertes est $0,4v$.

L'échange des proportions se traduit par : $\frac{0,4v}{1,6b} = \frac{b}{v}$.

Ce qui donne $v^2 = 4b^2$ et $v = 2b$.

Le nombre total de grenouilles au départ est $v + b = 3b$.

Le nombre total de grenouilles à la fin est $1,6b + 0,4v = 2,4b$.

Le nombre de grenouilles a diminué de 20%.

24. Réponse E. Parmi les nombres de 7 chiffres utilisant les chiffres de 1 à 7 une fois chacun, il y en a autant commençant par chacun des sept chiffres. Donc, il y en a autant commençant par 1, 2 ou 3 que commençant par 5, 6 ou 7. Et la médiane est aussi celle de la sous-liste des nombres qui commencent par 4.

Dans les nombres de 6 chiffres utilisant les chiffres 1, 2, 3, 5, 6 et 7 une fois chacun, le nombre juste avant le nombre médian est le plus grand des nombres commençant par 3, soit 376521.

Le nombre cherché est donc 4376521 (et celui qui est juste après le nombre médian est 4512367).

25. Réponse 2. $q + \frac{1}{r}$ est plus grand que 1 donc son inverse est plus petit que 1 et p est la partie entière de $\frac{25}{19}$ soit $p = 1$. Alors $q + \frac{1}{r} = \frac{19}{6}$.

$r \neq 1$ car sinon $q = \frac{19}{6} - 1$ qui n'est pas un entier ; donc $\frac{1}{r}$ est plus petit que 1 et q est la partie entière de $\frac{19}{6}$ soit 3. D'où $\frac{1}{r} = \frac{1}{6}$ et $r = 6$.

Finalement : $\frac{r}{q} = 2$.

26. Réponse 5. Soit V le nombre de véridiques.

Le nombre de menteurs est $10 - V$.

Le véridique le plus en avant dans la file a $V - 1$ véridiques derrière lui.

Plus de $V - 1$ menteurs sont donc devant lui, et donc : $10 - V > V - 1$.

D'où $V < 5,5$.

Le menteur le plus en arrière de la file a $9 - V$ menteurs devant lui.

Au moins $9 - V$ véridiques sont donc derrière lui, et donc $V \geq 9 - V$.

D'où $V \geq 4,5$.

On a donc $V = 5$. Il y a 5 véridiques et 5 menteurs. On sait aussi que la file se compose des 5 menteurs suivis des 5 véridiques.

© Art Culture Lecture - les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 5 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »