KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2013 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **C.** 20^{13} est le plus grand des entiers proposés, les quatre autres étant inférieurs à 10^{13} et même à 10^7.

2. Réponse **C.** Le diamètre du cercle inscrit est la longueur d'un des côtés du grand octogone. Son rayon est donc la moitié de 10, soit 5.

3. Réponse **D.** Diderot est né le 5 octobre 1713 et est mort le 31 juillet 1784 ; il est mort à 70 ans.

4. Réponse **D.** La première année qui s'écrit avec les quatre premiers chiffres après 2013 est 2031 ; cela se reproduira donc 18 ans après 2013.

5. Réponse **E.** Les segments [SJ] et [SK] sont dans la même face du cube, celle de devant. De devant ou de derrière, on obtient A. De droite ou de gauche, on obtient B. De dessous, on obtient C. De dessus, on obtient D. E est la vue impossible.

6. Réponse **D.** $2013-(5\times 403)=-2$. f étant périodique de période 5, $f(2013)=f(-2)$. Et $f(-2)=4$.

7. Réponse **D.** Le produit de la moyenne par 5 doit être entier car c'est la somme des enfants des cinq familles. Seul 2,4 convient.

8. Réponse **D.** Comme f est affine, le taux d'accroissement est constant.

Donc $\dfrac{f(2013)-f(2001)}{2013-2001}=\dfrac{f(2031)-f(2013)}{2031-2013}$ et

$f(2031)-f(2013)=\dfrac{100\times 18}{12}=150.$

9. Réponse **C.** Connaissant ce que capturent les trois premiers, les trois derniers capturent au total 14 méchants. Si n est le nombre de méchants capturés par le quatrième superhéros alors le cinquième et le sixième en capturent au plus $n-1$. Donc $3n-2 \geqslant 14$ et $n \geqslant 16/3$. Comme n est entier, le quatrième superhéros a capturé au moins 6 méchants.
Il peut effectivement en avoir capturé 6, par exemple avec 1, 2, 3, 6, 4 et 4 dans l'ordre des nombres de méchants capturés.

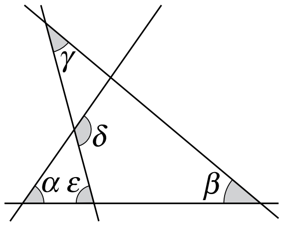
10. Réponse **C.** En observant le cube trafiqué par Lubin, on voit que les 4 petits cubes ôtés n'appartiennent pas tous à une même face. Il est donc impossible d'avoir l'empreinte C.
Et on peut vérifier que les autres propositions correspondent bien à des empreintes de faces du cube découpé (A : dessous ou derrière, B : droite, D : dessus ou devant, E : gauche).

11. Réponse **E.** Les règles usuelles des inégalités dans les réels positifs (élévation au carré, retrancher un même nombre, multiplication par un réel positif) montrent déjà que les trois premières inégalités sont vraies. La quatrième est aussi vraie car : $2 < x < 3$ et $0 < x-2 < 1$ donc $0 < x(x-2) < 3$ (en multipliant membre à membre).

12. Réponse **A.** Comme $3 \times 33 = 99$ et que $3 \times 333 = 999$, il faut, pour que $3n$ s'écrive avec 3 chiffres, que $34 \leqslant n \leqslant 333$, c'est-à-dire $\frac{34}{3} \leqslant \frac{n}{3} \leqslant 111$. Et alors, pour que $\frac{n}{3}$ soit un entier écrit avec trois chiffres, il ne peut qu'être égal à 100, 101, … ou 111.
Il y a donc 12 valeurs de n qui conviennent (les multiples de 3 entre 300 et 333 inclus).

13. Réponse **D.** En fondant le volume V devient $\frac{13V}{12}$.
Puis, en se solidifiant pour revenir à un volume égal à V, le volume diminue de $\frac{V}{12}$; cette diminution représente $\frac{1}{13}$ de $\frac{13V}{12}$.

14. Réponse **E.** Appelons ε un cinquième angle de la figure (voir ci-contre).
Alors : $\alpha + \varepsilon = \delta$.
Et aussi : $\varepsilon = \beta + \gamma$.
Donc : $\delta = \alpha + \beta + \gamma = 130°$.

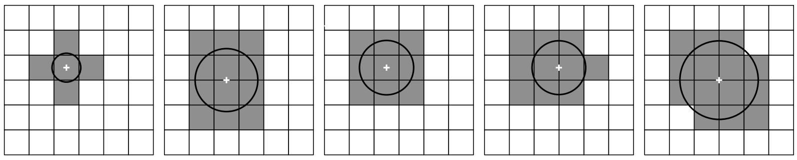


15. Réponse **A.**
Si « exactement 18 garçons donnent leur main droite à une fille » et sachant qu'il y a 40 garçons,
alors « exactement 22 garçons donnent leur main droite à un garçon », et donc il y a 22 couples de mains de garçons, main droite de l'un dans main gauche de l'autre et :
« exactement 22 garçons donnent leur main gauche à un garçon ».
Les 18 autres garçons donnent donc leur main gauche à une fille.
Remarque 1 : avec un nombre de filles différent (au moins égal à 18), le résultat serait le même.
Remarque 2 : un cas particulier (en notant F pour une fille, G pour un garçon, tous regardant vers le centre du cercle) est, en parcourant le cercle, la succession de 18 GF puis 10 F puis 22 G (suivis du premier G des successions GF).

16. Réponse **B.** 45% c'est 9 sur 20. La suite d'entiers ne pourrait avoir qu'un nombre pair de nombres. Il y aurait alors autant de nombres impairs que de pairs, soit 50%. C'est donc impossible. On obtient un pourcentage :
- de 50% avec (1 ; 2) par exemple ;
- de 40% soit 2/5 avec (2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) par exemple ;
- de 60% soit 3/5 avec(1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5) par exemple ;
- de 48% soit 12/25 avec (2 ; 3 ; … ; 25 ; 26) par exemple.

17. Réponse **A.** En $+\infty$ la fonction tend vers $-\infty$, ce qui exclut B et D. $g(x) = 0$ uniquement pour $x = a$ ou $x = b$, ce qui exclut E. Pour $a < x < b$, $(a - x)(b - x)^2 < 0$; $g(x)$ est donc négatif (ou nul) entre a et b, ce qui exclut C. Seule la courbe A convient.

18. Réponse **E.** Des cercles correspondant au bord du tapis sont faciles à construire pour les dessins A (cercle de diamètre compris entre 1 et $\sqrt{2}$, en prenant le côté du carreau comme unité), B et C ; pour D, c'est possible avec un cercle de diamètre compris entre 2 et $\sqrt{5}$ (voir ci-dessous, les centres étant repérés par des croix blanches).

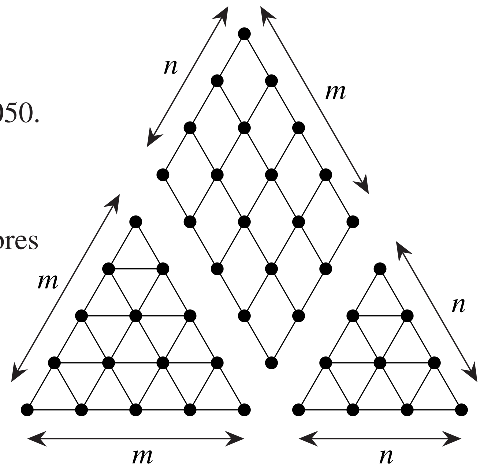


Et c'est bien impossible pour E : les carreaux les plus éloignés le sont d'une distance de $2\sqrt{2}$ et tout cercle de diamètre supérieur à $2\sqrt{2}$ coupe au moins deux carreaux blancs.

19. Réponse **D.** $2013^6 = (2013^3)^2 = (2013^2)^3$.
Ainsi, entre 1 et 2013^6, il y a $S = 2013^3$ carrés et $Q = 2013^2$ cubes (sur les réels positifs les fonctions carré et cube sont strictement croissantes). On a donc $S = 2013Q$.

20. Réponse **A.** Dans un triangle, les mesures des angles et celles de leurs côtés opposés se rangent dans le même ordre. Ainsi :
- dans TRS, $\text{TS} < \text{SR} < \text{TR}$;
- dans RUS, $\text{SR} < \text{SU} < \text{RU}$.
TRS et RUS étant semblables (angles de 59°, 60° et 61°), on a :
$\frac{\text{TR}}{\text{RU}} = \frac{\text{SR}}{\text{SU}}$ et, puisque $\text{SR} < \text{SU}$, on a aussi $\text{TR} < \text{RU}$.
Des cinq longueurs, RU est donc la plus grande.

21. Réponse **D.** Calculons les premiers termes de la suite.
$a_1 = 1$.
$a_2 = a_1 + a_1 + 1 \times 1 = 2\,a_1 + 1 = 3$.
$a_3 = a_2 + a_1 + 2 \times 1 = 3 + 1 + 2 = 6$.
a_4 peut se calculer de deux manières :
$a_4 = a_3 + a_1 + 3 \times 1 = 6 + 1 + 3 = 10$ et
$a_4 = a_2 + a_2 + 2 \times 2 = 3 + 3 + 4 = 10$ qui donne bien le même résultat.
Avec $a_1 = 1$, on a, pour tout $k \geqslant 1$, $a_{k+1} = a_k + 1 + k$, et donc a_k est le nombre « triangulaire » égal à la somme des entiers de 1 à k.
$a_k = \frac{k(k+1)}{2}$.
Donc $a_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$.
Remarque : la formule
$a_{m+n} = a_m + a_n + mn$
est une propriété des nombres triangulaires illustrée par le dessin ci-contre.
a_{m+n} est la somme des nombres triangulaires a_m et a_n et d'un « rectangle » mn.

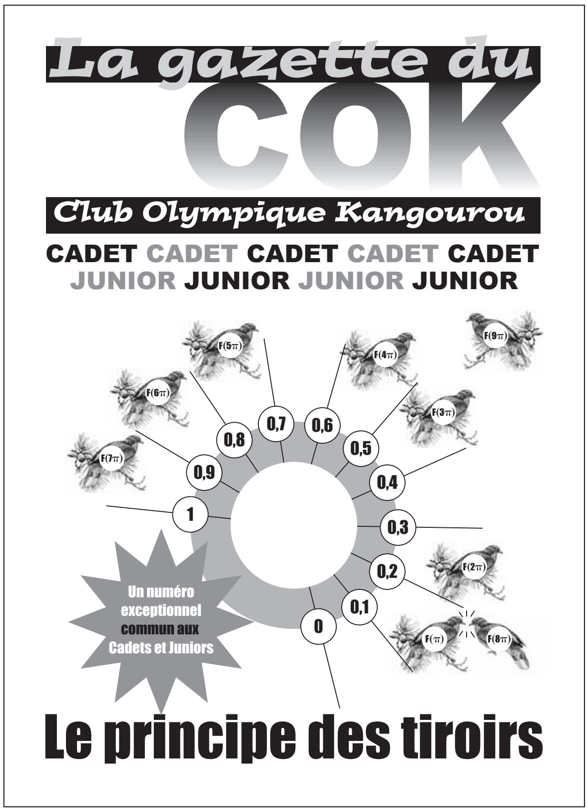


22. Réponse **C.** Les distances parcourues 100 heures après le départ de la première voiture sont dans l'ordre de départ :
50×100, 51×99, … 75×75, … , 99×51, 100×50.
Remarque : 25 résultats sont deux fois listés, seule la voiture roulant à 75 km/h a parcouru une distance différente de toutes les autres ; comme au Kangourou il n'y a qu'une seule bonne réponse proposée, on pourrait conclure que c'est elle qui est devant toutes les autres.
On peut aussi montrer facilement que $x(150 - x)$ est bien maximum pour $x = 75$. (*On prouve de la même manière qu'à périmètre ou demi-périmètre constant, l'aire maximale d'un rectangle est le carré.)*

23. Réponse **C.** Pour un entier compris entre 100 inclus et 999 inclus la somme de ses chiffres est un entier compris entre 1 et 27.
La somme 1 n'est obtenue que pour une carte (celle numérotée 100) et la somme 27 aussi (carte numérotée 999).
Pour toutes les autres sommes, elles sont obtenues au moins 3 fois :

- pour les sommes de 2 à 9, avec les trois nombres (en écriture décimale) $i00$, $(i-1)10$ et $(i-1)01$, i valant de 2 à 9 ;
- pour les sommes de 10 à 18, avec les trois nombres (en écriture décimale) $90i$, $81i$ et $72i$, i valant de 1 à 9 ;
- pour les sommes de 19 à 26, avec les trois nombres (en écriture décimale) $99i$, $9i9$ et $i99$, i valant de 1 à 8 .

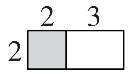
Imaginons alors 27 tas de cartes : 2 tas réduits à une seule carte (carte 100 et carte 999 de sommes 1 et 27) et 25 tas comportant chacun au moins trois cartes (pour les sommes de 2 à 26).
En tirant 52 cartes, on peut avoir tiré la carte 100, la carte 999 et deux cartes dans chacun des 25 autres tas ; et on peut ne pas obtenir trois cartes donnant la même somme.
Alors que dès la 53^{e} carte tirée, on tire forcément une carte d'un même tas que deux autres (et on a 3 cartes de même somme).
Le nombre minimum cherché est donc 53.
(*Voir les articles du Kangourou sur le « principe des tiroirs ».)*



24. Réponse **B.** La somme des entiers de 1 à n est $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et doit être égale à $111p$, avec p entier entre 1 et 9.
Ce qui donne $n(n+1) = 2 \times 3 \times 37 \times p$; 37 étant un nombre premier.
Et alors les deux entiers successifs ne peuvent être que 37 et 38 (mais 38 n'est pas divisible par 3) ou 36 et 37 avec $p = 6$. Donc $n = 36$. Et la somme des chiffres de n est 9.

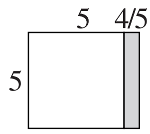
25. Réponse **4.** Remarquons que si un rectangle est constitué d'un carré et d'un petit rectangle, alors le petit rectangle et le carré ont un côté commun.

• Si c'est le carré qui a une aire de 4 et donc un côté de 2, alors le rectangle R ne peut être que de dimension 2×5.

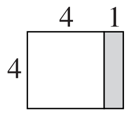


• Si c'est le petit rectangle qui a une aire de 4, examinons les possibilités suivant la valeur du côté du carré.

- Si le carré a pour côté 5, alors le petit rectangle d'aire 4 a des côtés de longueurs 5 et $\dfrac{4}{5}$; et R est de dimension $5 \times \dfrac{29}{5}$.



- Si le carré a pour côté $x \neq 5$, alors le petit rectangle a des côtés de longueurs x et $5 - x$ et son aire est $x(5-x) = 4$;
on a donc $x^2 - 5x + 4 = 0$ ou $(x-1)(x-4) = 0$;
ce qui donne 2 rectangles R possibles (5×1 et 5×4).



Il y a donc 4 rectangles R différents.

26. Réponse **6.** X, Y et Z se coupent deux à deux car si deux étaient parallèles alors elles couperaient le même nombre de droites.
Si Z ne coupait que X et Y, alors toutes les autres droites lui seraient parallèles ; et, X et Y couperaient un même nombre de droites, ce qui est faux. Z, ne coupant ni 3 ni 4 droites, doit donc couper au moins 3 droites autres que X et Y ; mais une seule doit couper X, donc il y a au moins 2 autres droites parallèles à X.
Alors Y coupe 4 droites (X et ses 2 parallèles, et Z) donc les autres droites ne peuvent qu'être parallèles à Y. Et il ne peut y en avoir qu'une autre puisque X en coupe exactement 3.
Il y a donc 6 droites (3 dont X dans une direction, 2 dont Y dans une autre direction et Z coupant ces 5 droites).