KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2013 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse **D.** 200 013 – 2 013 = 198 000.

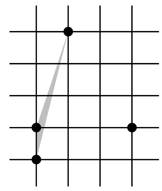
2. Réponse **B.** Quand un polygone gris a même périmètre que le carré, les côtés de ce polygone qui ne sont pas inclus dans les côtés du carré peuvent y être reportés exactement. Ce n'est pas le cas pour le dessin B où les deux branches verticales internes du U sont en trop.

3. Réponse **D.** Mado a payé 2×10, soit 20 € pour les 12 premières brioches (dont deux gratuites) ; et 8 € pour les 4 supplémentaires. Elle a payé 28 € au total.

4. Réponse **C.** $x = 7$; $y = 2$ et $z = 5$. $x + y + z = 14$.

5. Réponse **A.** $2013 = 33 \times 61 = 33 \times (31 + 30)$.
Les 2013 pages sont donc terminées après 61 jours de lecture ; mars et avril comptant ensemble exactement 61 jours, il ne reste aucune page à lire le 1er mai.

6. Réponse **B.** Le triangle le plus à gauche a un côté de 1 et une hauteur de 1 soit une aire de $\frac{1}{2}$.
Et c'est la plus petite aire qu'on peut trouver :
les aires des trois autres triangles sont $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$ et $\frac{11}{2}$.

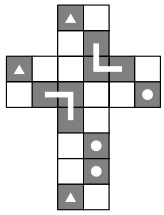


7. Réponse **D.** Il y a 3 chemins pour partir de G, et, à chaque sommet suivant 2 chemins possibles pour atteindre H. Cela fait 6 chemins possibles au total.

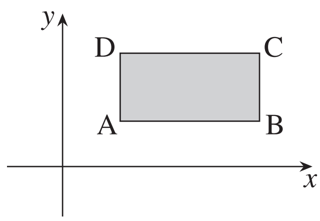
8. Réponse **C.** Le plus grand multiple de 4 à 3 chiffres est 996 et le plus petit est 100. $996 - 100 = 896$.

9. Réponse **A.** La rotation donne le dessin proposé en réponse B. La symétrie axiale par rapport à l'axe des x transforme l'arc de B en celui de A.

10. Réponse **E.** On peut repérer les groupes de 3 « quarts de face » autour des sommets du grand cube. Un seul des patrons proposés a bien 4 groupes tous noirs et quatre tous blancs. C'est le E, qui est représenté ci-contre avec un repérage des groupes noirs.



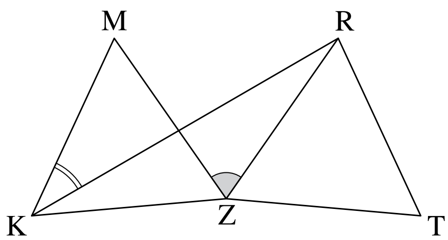
11. Réponse **B.** Pour minimiser le quotient y/x avec des nombres x et y positifs, il faut que y soit le plus petit possible et x le plus grand possible. Le point qui a la plus petite ordonnée avec la plus grande abscisse est B.



12. Réponse **C.** 1000 n'est pas divisible par 16. $1000 = 2^3 \times 5^3$.
$1000 = 125 \times 8 = 50 \times 20 = 25 \times 40$.
Les 3 seuls nombres (parmi les 6 proposés) dont le produit est 1000 sont donc 125, 4 et 2.

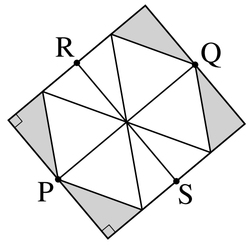
13. Réponse **C.** A et D sont égaux et inférieurs à B ($\sqrt{13} < 13$). On compare les carrés de B, C et E : $B^2 = 20 \times 13^2$; $C^2 = 20^2 \times 13 = 5200$ et $E^2 = 2013$. C est le plus grand des cinq nombres proposés.

14. Réponse **D.**
K, M, R et T sont sur le même cercle de centre Z. L'angle au sommet $\widehat{MKR}$ vaut donc la moitié de l'angle au centre $\widehat{MZR}$, soit 35°.



15. Réponse **B.** Chaque carré contribue pour 2 côtés au périmètre du zigzag, sauf les deux carrés des extrémités qui contribuent pour 3 côtés. $(2 \times 3) + (2011 \times 2) = 4028$.

16. Réponse **C.** L'aire de l'hexagone est six fois celle de chacun des triangles équilatéraux qui le constituent.
Le produit PQ×RS est l'aire du rectangle dans lequel s'inscrit l'hexagone (dont les côtés sont parallèles à PQ et RS). L'aire de ce rectangle vaut huit triangles équilatéraux, soit 8/6 de celle de l'hexagone.



17. Réponse **C.** Soit G le nombre de garçons et N le nombre d'élèves de la classe.
L'augmentation de la somme des notes de la classe serait $4G$ (4 points de plus par garçon) mais aussi N (la moyenne augmente de 1).
D'où $\frac{G}{N}=\frac{1}{4}$. Il y a 25% de garçons et donc 75% de filles.

18. Réponse **E.** $2013 = 1 \times 3 \times 11 \times 61$.
On en déduit les quatre décompositions de 2013 en produit de 2 facteurs. Une seule convient (les réponses possibles étant des âges « humains ») : 33×61. On a donc l'âge de Jean (61 ans), celui de son fils (33 ans) et leur différence d'âge ($61 - 33 = 28$).

19. Réponse **D.** $4^{15} = \left(2^2\right)^{15} = 2^{30}$ et $8^{10} = \left(2^3\right)^{10} = 2^{30}$.
Et donc : $4^{15} + 8^{10} = 2 \times 2^{30} = 2^{31}$.

20. Réponse **C.** On note les cinq entiers consécutifs : $n-2$; $n-1$; n ; $n+1$ et $n+2$ (avec $n \geqslant 3$ car il s'agit d'entiers strictement positifs).
Si le plus grand des cinq entiers positifs est dans le groupe de trois alors il y est nécessairement avec les deux plus petits (sinon les deux du groupe de deux sont strictement inférieurs à deux du groupe de trois), et alors on a : $(n+2)+(n-2)+(n-1) = n+(n+1)$, soit $n=2$. Ce qui donnerait $4+1+0=2+3$ mais c'est exclu car les entiers doivent être strictement positifs.
$n+2$ est donc dans le groupe de 2 nombres. Il y a 4 possibilités :
• $(n+2)+(n+1) = n+(n-1)+(n-2)$; $n=6$; les entiers sont 4, 5, 6, 7 et 8 avec $7+8=4+5+6$;
• $(n+2)+n = (n+1)+(n-1)+(n-2)$; $n=4$; les entiers sont 2, 3, 4, 5 et 6 avec $6+4=5+3+2$.
• Les deux autres possibilités donnent $n=2$ et $n=0$ et donc des entiers consécutifs non tous strictement positifs.
Il y a donc deux ensembles ayant la propriété voulue.

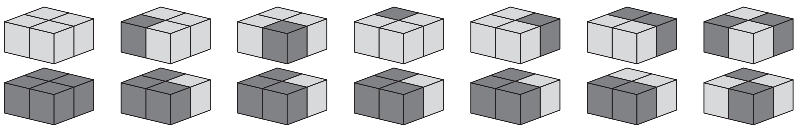
21. Réponse **C.** $1024 = 2^{10}$.
Donc $\frac{10^{10}}{1024}$ est le nombre entier 5^{10} (qui ne se termine pas par 0).
Et $\frac{1}{1024} = \frac{5^{10}}{10^{10}}$ a donc 10 chiffres après la virgule.

22. Réponse **D.** 19, 17 et 13 ne divisent qu'eux-mêmes parmi les nombres de 1 à 22 ; et ils sont premiers. Donc, au mieux, l'un donnera une fraction avec 1 comme dénominateur et les deux autres cartes resteront sans former de fraction à valeur entière. On ne peut donc utiliser que 20 cartes et faire 10 fractions au maximum ; et cela est possible, par exemple en formant : 22/11, 21/7, 20/10, 18/9, 16/8, 15/5, 14/2, 13/1, 12/4 et 6/3.

23. Réponse **E.** Partant de $(1 ; 2 ; 3)$, la procédure donne successivement $(5 ; 4 ; 3)$ puis $(7 ; 8 ; 9)$ puis $(17 ; 16 ; 15)$…
Le nombre central est une puissance de deux et les trois nombres du triplet sont consécutifs, ce qui peut se prouver par récurrence :
si les nombres sont $(2^k - 1 ; 2^k ; 2^k + 1)$, la liste suivante est
$(2^k + 2^k + 1 ; 2^k - 1 + 2^k + 1 ; 2^k - 1 + 2^k) = (2^{k+1} + 1 ; 2^{k+1} ; 2^{k+1} - 1)$ et la suivante $(2^{k+2} - 1 ; 2^{k+2} ; 2^{k+2} + 1)$.
2013 n'est pas une puissance de 2, ni 2012, ni 2014 ($2^{10} = 1024$ et $2^{11} = 2048$). 2013 ne peut donc pas apparaître dans la liste.

24. Réponse **B.** Soit L la longueur du tuyau en pas.
Pendant les 140 pas de Victor, le tracteur a avancé de $140 - L$ pas.
Pendant les 20 pas de Victor, le tracteur a avancé de $L - 20$ pas.
Les vitesses étant constantes, on a : $\dfrac{140}{20} = \dfrac{140 - L}{L - 20}$.
Et donc $7(L - 20) = 140 - L$; $8L = 280$; $L = 35$.
Un pas valant un mètre, la longueur du tuyau est 35 m.

25. Réponse **7.** Voici les sept cubes possibles, chacun avec la moitié où il y a le plus de cubes unités noirs en dessous et l'autre moitié un peu détachée pour voir tous les petits cubes.



Remarque : les 3^e^ et 4^e^ sont images l'un de l'autre dans un miroir mais sont différents.

26. Réponse **2.** Dans la ligne 12233344445…
Chaque entier u de 1 à 9 est écrit u fois. Leur écriture occupe 45 places.
Suivent dans la ligne les nombres à deux chiffres.
Pour compter, considérons (un moment) que chaque nombre s'écrit avec deux chiffres (de 01 à 99). Après avoir écrit n fois le nombre n, le nombre total de chiffres alignés serait alors égal à :

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2}, \text{ soit } n(n+1).$$

On a $31 \times 32 = 992$. Jusqu'au 31^e^ nombre 31 écrit, sachant qu'il ne faut compter qu'une fois les 45 premiers chiffres écrits, seront donc alignés $992 - 45$, soit 947 chiffres. Derrière vient 32 écrit 32 fois de suite soit jusqu'à la 1011^e^ place. À la 999^e^ place, place impaire, figure le chiffre 2.