

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)

Tél. : 01 43 31 40 30

www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 5 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2009 - Corrigé de l'épreuve Cadets

1. Réponse C. $200 \times 9 + 200 + 9 = 1800 + 200 + 9 = 2009$.

2. Réponse D. Le grand carré est découpé en 9 carrés identiques. Le carré central est découpé en quatre petits carrés. Le carré noir représente donc le quart d'un neuvième du grand carré d'aire 1 ; son aire est : $\frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$ soit $\frac{1}{36}$.

3. Réponse C. Le périmètre de l'étoile est douze fois la longueur d'un côté du petit triangle équilatéral, celui de l'hexagone est six fois cette même longueur. Le périmètre de l'hexagone est donc égal à la moitié de celui de l'étoile ; c'est-à-dire 18 cm.

4. Réponse D. $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$...
À partir de 10, le nombre de chiffres du carré dépasse celui du nombre :
un nombre de $n + 1$ chiffres peut s'écrire $10^n + a$ et comme
 $(10^n + a)^2 = 10^{2n} + \dots$, le carré d'un nombre de $n + 1$ chiffres
a au moins $2n + 1$ chiffres.

Il y a finalement 3 nombres (non nuls) de 1 chiffre qui ont le même nombre de chiffres que leur carré : 1, 2 et 3.

5. Réponse B. Du numéro 15 au numéro 53 inclus, il y a 39 maisons. Entre 15 et 53, les nombres impairs sont un de plus que les nombres pairs. Il y a donc 20 numéros impairs.

6. Réponse C. Le nombre total de danses des garçons est le même que celui des filles. Les garçons ont dansé $3 + 1 + 2 + 2$, soit 8 danses ; les 3 premières filles ont dansé $4 + 0 + 2$, soit 6 danses. La quatrième fille a donc dansé 2 fois.

7. Réponse C. Un chat ayant 4 pattes et un chien 2 oreilles, les chats sont deux fois moins nombreux que les chiens.

8. Réponse C. Le triangle PQS est isocèle en P et $\widehat{QPS} = 12^\circ$ donc :

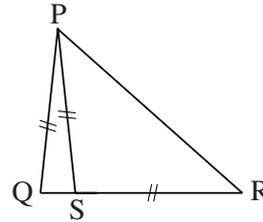
$$\widehat{PQS} = \widehat{QSP} = \frac{180^\circ - 12^\circ}{2} = 84^\circ.$$

$$\widehat{PSR} = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ.$$

Le triangle PSR est isocèle en S donc :

$$\widehat{SPR} = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ.$$

$$\text{Et } \widehat{QPR} = \widehat{QPS} + \widehat{SPR} = 12^\circ + 42^\circ = 54^\circ.$$



9. Réponse C. L'ascenseur peut contenir 12 adultes. S'il en contient 9, il est rempli aux $3/4$. On peut donc le compléter avec $1/4$ du nombre maximal d'enfants qu'il peut contenir, c'est-à-dire 5.

10. Réponse D. Il y a une seule façon d'obtenir 100 en faisant un produit de 4 facteurs entiers différents : $100 = 10 \times 5 \times 2 \times 1$. La somme est donc : $10 + 5 + 2 + 1 = 18$.

11. Réponse C. Aucune somme de trois angles pris parmi les quatre donnés ne fait 180° , de plus les angles 120° et 75° ne peuvent pas appartenir au même triangle (leur somme dépasse 180°).

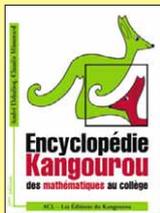
Le triangle ayant un angle obtus (120°) a donc un autre angle égal à 55° ou à 10° .

Dans le premier cas, le triangle restant aura alors des angles de mesures 75° , 10° et 95° ($95 = 180 - 75 - 10$), ce qui contredit l'hypothèse que tous ses angles sont aigus.

Dans le second cas, le triangle n'ayant que des angles aigus aura alors des angles de mesures : 75° , 55° et 50° ($50 = 180 - 75 - 55$).

12. Réponse A. Par symétries axiales, on met en évidence que l'aire grisée est égale à l'aire du petit carré. Or, le côté du petit carré est moitié de celui du grand carré. L'aire grisée est donc égale à $1/4$ de celle du grand carré.

13. Réponse B. Si on veut rapprocher les deux A en deux fois, G ne peut pas rester à sa place de départ. On vérifie aisément que les autres propositions peuvent s'obtenir en 2 échanges.



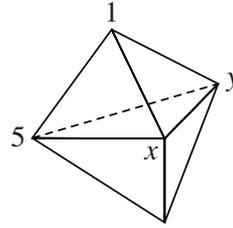
Encyclopédie Kangourou

Toutes les mathématiques enseignées au collège en 192 pages.

Les définitions, les théorèmes et les propriétés à connaître, illustrés et expliqués par des exemples, des exercices amusants, des tests pertinents, des conseils de méthode, des savoir-faire astucieux et des petites histoires de la grande histoire des mathématiques...

Toutes les publications
des Éditions du Kangourou
sont présentées sur le
site Internet
www.mathkang.org

14. Réponse C. Les nombres x et y écrits aux 2 sommets restants du plan médian vérifient $1 + 5 + x = 1 + 5 + y = 1 + x + y$.
Et donc $x = y = 5$.
Le troisième sommet porte donc un 1 et la somme totale est $1 + 3 \times 5 + 1$, soit 17.



15. Réponse B. L'égalité s'écrit : $2A + 2O + K + N + G + R = 56$.
Si A et O ne valent pas l'un 8, l'autre 9, alors $2A + 2O + K + N + G + R$ vaut au maximum : $2 \times 9 + 2 \times 7 + 8 + 6 + 5 + 4$, soit 55. Cette somme est inférieure à 56.
Pour obtenir l'égalité proposée, les deux voyelles A et O ont donc pour valeurs l'une 8 et l'autre 9. D'où $A + O = 17$.

16. Réponse A. Pour la case vide de la première ligne, il n'y a que deux possibilités : A ou D.
- Si c'est A, D est dessous et il n'y a alors qu'une manière de remplir la grille selon les règles (voir dessin du haut ci-contre).
- Si c'est D, A est dessous et il n'y a alors qu'une manière de remplir la grille selon les règles (voir dessin du bas ci-contre).

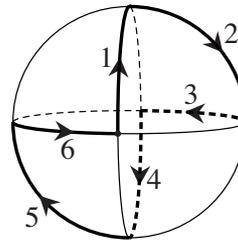
A	B	A	C	D
D	C	D	B	A
A	B	A	C	D
D	C	D	B	A

A	B	D	C	D
D	C	A	B	A
A	B	D	C	D
D	C	A	B	A

Dans les deux cas, la case grisée contient A.

17. Réponse D. Le premier motif est constitué de 20 carrés, on peut décomposer cette somme en : $5^2 - 1 - 4$ (partant d'un carré 5×5 , on enlève le trou gris et les 4 coins).
Le nombre de petits carrés du 2^e motif est : $6^2 - 2^2 - 4$, soit 28.
Le nombre de petits carrés du 3^e motif est : $7^2 - 3^2 - 4$, soit 36.
Le nombre de petits carrés du 10^e motif est : $14^2 - 10^2 - 4$, soit 92.

18. Réponse A. La fourmi repasse par son point de départ après 6 quarts de cercles. Son parcours est représenté ci-contre.



19. Réponse E. Les chiffres 1 et 3 ne peuvent être côte à côte. Donc les nombres considérés ont un chiffre sur deux égal à 2.
Avec 2 comme chiffre des milliers, il y a 4 nombres : 2121, 2123, 2321 et 2323 (les deux chiffres 1 et 3 peuvent se placer chacun à 2 positions).
Avec 2 comme chiffre des centaines, il y a 4 nombres : 1212, 1232, 3212, 3232.
Au total, 8 nombres ont la propriété requise.

20. Réponse B. Mettons les fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}, \quad \frac{1}{4} = \frac{15}{60} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} = \frac{20}{60}.$$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{8}{60}$. Les graduations sont donc espacées de $\frac{1}{60}$.

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{60}$. $\frac{1}{4}$ se trouve donc 3 graduations après $\frac{1}{5}$, soit en b.

21. Réponse B. À chaque « coup de scie », on ajoute, à l'aire totale des solides, une aire égale à l'aire de 2 faces du cube initial.

En trois coups de scie, on a rajouté l'aire de 6 faces du cube initial soit exactement l'aire du cube.

La somme des aires des faces des parallélépipèdes est donc le double de l'aire du cube de départ.

22. Réponse A. Ani et Bob ont 1 an d'écart, Bob et Dan ont 2 ans d'écart, donc Ani et Dan ont au maximum 3 ans d'écart.

L'écart entre Ani et Tag étant supérieur aux écarts de chacun d'eux à Dan, Dan est entre Ani et Tag. Et il est à 1 an d'Ani (4-3), comme Bob.

Bob et Dan encadre donc Ani (ils ont d'ailleurs 2 ans d'écart).

Et Ani n'est ni le plus jeune ni le plus âgé.

23. Réponse B. Soit F le nombre de filles et G le nombre de garçons.

$$\frac{F}{G} = 0,24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

Cette dernière fraction est celle qui a le plus petit dénominateur entier, parmi celles qui représentent le nombre 0,24.

Il y a donc (si on ne veut pas de morceaux de filles ou de garçons) au minimum 25 garçons et 6 filles, soit 31 personnes.

24. Réponse B. Pour couvrir le maximum de la surface du triangle avec le carré, ou le maximum de la surface du carré avec le triangle, il faut maximiser la surface de superposition des deux figures. L'aire de superposition est la même dans les deux cas. Cette aire est égale à 60% soit $\frac{3}{5}$ de l'aire du triangle et à $\frac{2}{3}$ de l'aire du carré (qui est égale à 36 cm^2).

Donc, l'aire du triangle, en cm^2 , est : $\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} \times 36$, soit 40.

25. Réponse 9.

Considérons les 4 groupes de multiples :

multiples de 2 : 2, 4, 6, 8, 10 ; multiples de 3 : 3, 6, 9 ;
multiples de 5 : 5, 10 ; multiple de 7 : 7.

Le nombre 1 peut être utilisé pour relier deux groupes de multiples ; sinon, il faut utiliser un nombre commun à deux listes pour passer de l'une à l'autre. Il n'y a que 6 et 10 dans cette situation. Et il faut en associer un à 2 (par exemple 2-6-3 pour passer des multiples de 2 à ceux de 3, ou 2-10-5 pour passer des multiples de 2 à ceux de 5).

Il n'y a donc que deux transitions possibles (avec le 1 ou avec le 2). 7 ne pourrait être qu'à une extrémité, mais cela obligerait à utiliser le 1 à côté de lui qui ne pourrait faire une autre transition. On ne peut donc pas écrire une liste de 10 nombres. En voici une de 9 nombres : 10-5-1-8-4-2-6-3-9. Vendredi a pu écrire au plus 9 nombres.

26. Réponse 8.

Soit E sur (AB) tel que
 $BE = BC$.

Alors $\widehat{BEC} = \widehat{ECB} = 80^\circ$.

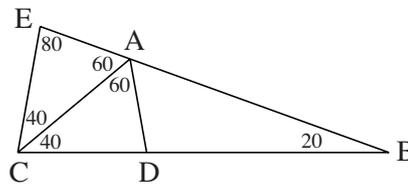
Comme $\widehat{ACB} = 40^\circ$, on a :

$\widehat{ACE} = 40^\circ$. Alors $\widehat{CAE} = 60^\circ$.

D'où $\widehat{CAB} = 120^\circ$ et (AD) étant la bissectrice de \widehat{CAB} : $\widehat{CAD} = 60^\circ$.

(AC) est donc la médiatrice de [ED] (axe de symétrie du quadrilatère ADCE). Et $AE = AD$. Or $AE = BE - AB = BC - AB$.

On a donc $BC - AB = AD = 8$.



© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 5 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »