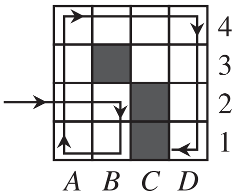
1. Réponse **B.** $2 + 0 + 0 + 7 = 9$ et $\dfrac{2007}{9} = 223$.

2. Réponse **D.**
Voir le parcours du robot sur le dessin.



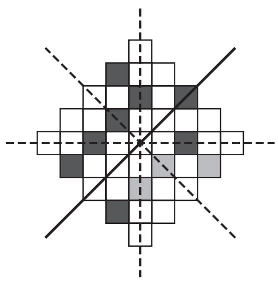
3. Réponse **A.** Les faces non visibles portent les numéros 1, 3 et 5. La somme demandée est donc 1 + 3 + 5, soit 9.

4. Réponse **C.** $x < 0$, donc $6x$ et $x - 1$ sont strictement négatifs aussi.
$x + 1 < 1$. Et $-x > 0$ donc, comme x est entier, $-x \geqslant 1$.
Le plus grand est $-x$.

5. Réponse **B.** La hauteur du parallélogramme IJKL relative à la base[IL] est la même que la hauteur du parallélogramme MJNL relative à la base [ML]. Comme M est le milieu de [IL], la base du second parallélogramme est la moitié de la base du premier, donc l'aire du second est la moitié de l'aire du premier, soit 5.

6. Réponse **B.** Il n'y a que 6 manières de choisir les nombres (en respectant la condition) et la somme obtenue est toujours la même :
$1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 15$.

7. Réponse **E.** Il y a 4 axes de symétrie possibles (tracés sur la figure ci-contre). Celui qui nécessite de noircir le moins de petits carrés pour être axe de symétrie est celui en trait plein :
il suffit de noircir les 3 cases ici grisées.



8. Réponse **B.** Chaque carré a un segment sur [LM] et trois segments de même longueur appartenant à la ligne brisée. La ligne brisée et le segment [LM] sont exactement l'union de tous les côtés des carrés. Donc la ligne brisée est trois fois plus longue que le segment [LM] et mesure 3×24 cm, soit 72 cm.

9. Réponse **D.** Appelons R le rayon des cercles. Le périmètre du petit rectangle est $12R$; et comme ce périmètre est 60 cm, on a donc $R = 5$ cm. Le périmètre du grand rectangle est $20R$, soit 20×5 cm et donc 100 cm.

10. Réponse **C.** Il y a en tout 8 espaces de 8 mètres de long. Jason fait donc 8×8 m, soit 64 mètres à cloche-pied.

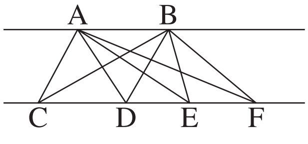
11. Réponse **D.** $\widehat{\text{STU}} = \widehat{\text{STR}} + \widehat{\text{RTU}} = 60° + 80° = 140°$.
Les angles à la base du triangle isocèle STU ont chacun pour mesure :
$\frac{1}{2}(180° - 140°)$ soit 20°.
Et $\widehat{\text{RSU}} = \widehat{\text{RST}} - \widehat{\text{UST}} = 60° - 20° = 40°$.

12. Réponse **A.** $1 = 1^2$ et $10\,000 = 100^2$. Les nombres carrés de nombres entiers parmi les entiers de 1 à 10000 sont donc les carrés des 100 entiers de 1 à 100. Cela fait donc 100 nombres sur 10 000.
$\frac{100}{10\,000} = \frac{1}{100}$ et le pourcentage est donc 1 %.

13. Réponse **B.** Dans la rotation de centre O qui amène L en M, A vient en B et le triangle LOA est transformé en triangle MOB. Ces deux triangles sont donc superposables. La même rotation permet de conclure que les triangles AOM et BON, NOC et KOD, COK et DOL, sont superposables. L'aire des parties grisées (couvertes par les quatre triangles LOA, BON, NOC et DOL) est ainsi égale à l'aire des parties non grisées (MOB, AOM, KOD et COK). C'est donc la moitié de l'aire du carré KLMN de côté 2, soit la moitié de 4.

14. Réponse **A.** 3^{11} et 5^{13} sont des nombres impairs : leur somme est donc paire, c'est-à-dire divisible par 2.

15. Réponse **D.** Soit (AB) la droite sur laquelle on choisit 2 points et (CD) celle parallèle où l'on choisit 4 points. Les triangles à dénombrer ont deux sommets sur une des droites et le troisième sommet sur l'autre.
Si 2 sommets sont sur (AB), on peut alors former 4 triangles.
Si 2 sommets sont sur (CD), alors on peut les choisir de 6 manières différentes et former, à chaque fois, 2 triangles en prenant l'un ou l'autre des 2 points sur (AB).
On a, au total, $4 + (6 \times 2)$, soit 16 triangles.



Avec les notations de la figure on obtient les 16 triangles suivants :
ABC, ABD, ABE, ABF,
ACD, ADE, AEF, ACE, ADF, ACF,
BCD, BDE, BEF, BCE, BDF, BCF.

16. Réponse **D.** Soient, en heures, x le temps passé sur le plat, y le temps passé en descente et z le temps passé en montée.
La distance parcourue en montée (à 3 km/h) est la même que celle parcourue en descente (à 6 km/h) : $z \times 3 = y \times 6$, soit $z = 2y$.
On sait que la durée de la promenade est 2 h : $x + y + z = x + 3y = 2$.
La distance totale parcourue par le marcheur, en km, est $4x + 6y + 3z$, ou $4x + 12y$, c'est-à-dire $4 \times (x + 3y)$, soit 4×2.

17. Réponse **A.** En notant respectivement a, b, c, d, e et f les masses d'André, Bernard, Charles, Daniel, Édouard et François, on a :
$a + b < c + d$ et $c + e < f + b$.
En ajoutant membres à membres ces deux inégalités de même sens, on obtient :
$a + b + c + e < c + d + f + b$ soit $a + e < d + f$.
L'affirmation A est vraie.
Voici des exemples où les autres affirmations peuvent être fausses :
B et C sont fausses si $a = 1$, $b = 7$, $c = 8$, $d = 1$, $e = 1$, $f = 3$;
D et E sont fausses si $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 4$, $e = 1$, $f = 1$.

18. Réponse **A.** W convient (rotation autour d'un axe vertical).
X ne convient pas (symétrie par rapport à un plan vertical).
Y convient (rotation autour d'un axe horizontal).
Z convient (symétrie par rapport à un plan horizontal).

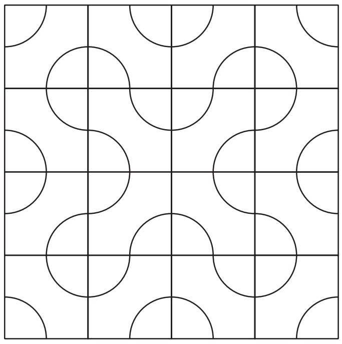
19. Réponse **D.** À partir de 2007, en insérant deux chiffres 1 pour former un nombre de six chiffres, on peut obtenir :
112007, 121007, 120107, 120017, 120071, 211007, 210107, 210017, 210071, 201107, 201017, 201071, 200117, 200171, 200711, soit 15 nombres.
(Il s'agit en fait de placer les 2 chiffres 1 parmi les 6 positions possibles dans le nombre. Tu apprendras plus tard que le nombre de possibilités se note C_6^2 et que $C_6^2 = 15$.)

20. Réponse **E.** Si h est le nombre de lignes horizontales et v le nombre de lignes verticales, le nombre de cases du tableau est $(h - 1) \times (v - 1)$. De plus, ici, $h + v = 15$.
h et v peuvent valoir 2 et 13 avec alors 1×12 soit 12 cases ;
ou 3 et 12 et 2×11 soit 22 cases ; ou 4 et 11 et 3×10 soit 30 cases ;
ou 5 et 10 et 4×9 soit 36 cases ; ou 6 et 9 et 5×8 soit 40 cases ;
ou 7 et 8 et 6×7 soit 42 cases.
Le tableau contient donc au maximum 42 cases.

21. Réponse **A.** Le volume d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h est $\pi R^2 h$.
Le rayon v du cylindre de hauteur 1 est tel que $2\pi v = 2$ et on a :
$V = \pi \times \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \times 1 = \frac{1}{\pi}$.
Le rayon w du cylindre de hauteur 2 est tel que $2\pi w = 1$ et on a :
$W = \pi \times \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2\pi}$.
On a donc $V = 2W$.

22. Réponse **C.** Si au lieu d'écrire des nombres, on écrit leurs restes dans la division par 3, les restes sont 0 si le nombre est divisible par 3 et 1 ou 2 sinon.
• Si on a un 0, ses voisins ne peuvent être 0 ni l'un ni l'autre (sinon on aurait deux adjacents divisibles par 3) et ces voisins sont égaux car sinon ils seraient 1 et 2 et la somme des trois serait divisible par 3.
- Si les voisins sont 1, le voisin suivant ne peut être 2 (2 + 1 = 3). Donc c'est 0 ou 1.
Si c'est 0, son autre voisin est 1 (un 0 a pour voisin deux 1 ou deux 2, on l'a dit au début). On a donc la configuration 1 0 1 0 1.
Si c'est 1, le voisin suivant ne peut être ni 2 (1 + 2 = 3) ni 1 sinon trois 1 à la suite donneraient une somme divisible par 3. C'est un 0 et on a la configuration 1 0 1 1 0.
Il y a donc toujours deux 0.
- Si le 0 est entouré par des 2, un raisonnement analogue montre qu'on a forcément trois 2 et deux 0.
• Étant parti d'un 0, il faut montrer qu'il y en a au moins un. S'il n'y en a pas, c'est qu'il n'y a que des 1 et des 2. Alors, il n'y a que des 1 ou que des 2 (car il ne peut y avoir de 1 à côté d'un 2). Et s'il n' y a que des 1 ou que des 2, la somme de trois adjacents est divisible par trois et ça ne va donc pas…
Finalement, deux des nombres sont divisibles par 3.

23. Réponse **B.** La ligne devant être fermée, on remarque que, pour chacun des 12 carreaux extérieurs, un au plus des deux quarts de cercle pourra en faire partie.



La boucle fermée ci-contre utilise tous les quarts de cercles des 4 carreaux du milieu et un de chaque carreau extérieur : elle est la plus longue possible. Sa longueur est celle de 20 quarts de cercle (ou 5 cercles) : $5 \times 2 \times \pi \times 10\,\text{cm} = 100\,\pi\,\text{cm}$.

24. Réponse **D.** Comme $15 = 5 \times 3$, si on élève 15 à une puissance, on élève 5 et 3 à cette puissance. Or on peut multiplier par 3 mais pas par 5 et donc la puissance du 5 est forcément inférieure ou égale à celle du 3. Les réponses A et E ne peuvent donc pas convenir.
Dans la réponse B, comme on trouve 5^2, c'est qu'on a élevé une seule fois à la puissance 2 et jamais à la puissance 3. On a donc obtenu ainsi 3^2 et on a donc multiplié 2 fois par 3 pour avoir 3^4, ce qui fait déjà 3 opérations. Pour obtenir ensuite 2^8, même si dès le départ on avait multiplié 5×3 par 2 (avant d'élever à la puissance 2), comme on ne peut plus que multiplier par 2, il faudra multiplier par 2 plus de deux fois le nombre $2^2 \times 3^4 \times 5^2$ pour arriver à $2^8 \times 3^4 \times 5^2$, ce qui fera plus de 5 opérations. Donc la réponse B ne convient pas.
Dans la réponse C, la puissance de 5 étant impaire et comme on ne peut multiplier par 5, c'est qu'on n'a jamais élevé à la puissance 2. On a donc fait au maximum 4 opérations : élever d'abord 3×5 à la puissance 3, puis multiplier 3 fois par 2. La réponse C ne peut donc convenir.
La réponse D est donc la seule pouvant convenir et on peut en effet l'obtenir après 5 opérations : $((15 \times 2)^2 \times 2 \times 3)^2 = 2^6 \times 3^6 \times 5^4$.

25. Réponse **9.** Soit n un chiffre cherché. n^2 ayant quatre chiffres au plus, la somme des chiffres de n est inférieure ou égale à 5.
Les 9 nombres 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 et 31 conviennent (comme le montre le tableau ci-dessous) mais pas les seuls autres possibles (14, 23, 32, 40, 41 et 50).

n :	10	11	12	13	20	21	22	30	31
(Σ chiffres de n)	1	2	3	4	2	3	4	3	4
(Σ chiffres de $n)^2$	1	4	9	16	4	9	16	9	16
n^2 :	100	121	144	169	400	441	484	900	961
Σ chiffres de n^2	1	4	9	16	4	9	16	9	16

26. Réponse **8.**
Dans la construction de la spirale, intéressons-nous aux cases qui se situent sur la diagonale Nord-Est en partant de la grisée.
Lorsqu'on arrive à une de ces cases, l'ensemble des cases où l'on a déjà écrit des chiffres forme un carré : de 3×3 cases, de 5×5 cases, … de 201×201 cases pour le carré ayant pour coin Nord-Est la case située 100 au-dessus et 100 à droite de la case grisée. Dans cette case, c'est un 9 qui est écrit (car 201 étant multiple de 3, son carré est multiple de 9). Et il faut revenir 100 cases à gauche pour trouver la case située 100 cases au-dessus de la case grisée. Or $100 = 9 \times 11 + 1$. Le chiffre cherché est donc 8.