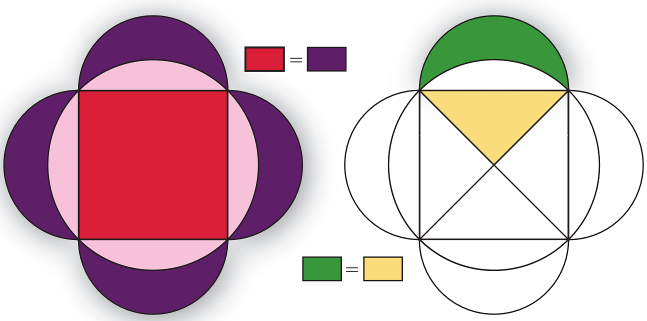
Les lunules de Vinci

À Milan, Léonard de Vinci fit la connaissance de Luca Pacioli, un grand mathématicien qui enseigna à Pérouse, Florence et Naples avant d'être invité à Milan en 1496 par Ludovic Sforza dit le More, qui gouverne à l'époque la région. Léonard va alors travailler avec Pacioli en particulier pour illustrer l'un de ses livres : *La divine proportion*.
Dans ce livre, on trouve, notamment, les magnifiques polyèdres que nous avons reproduits pages 16 et 17.
Mais Léonard s'inspira aussi des travaux d'autres artistes italiens sur la perspective : Piero della Francesca (mort en 1492) et Alberti (mort en 1472).

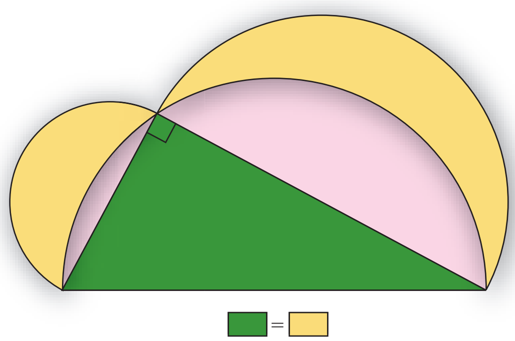
Alberti s'était tout particulièrement intéressé au « vieux » problème de la quadrature du cercle : *construire un carré ayant exactement la même surface qu'un cercle*. Et il citait Hippocrate de Chios (– 470, – 410), mathématicien (à ne pas confondre avec Hippocrate « l'inventeur » de la médecine et de la chirurgie) ; celui-ci avait en effet avancé dans cette recherche de *quadrature* et il avait trouvé un carré de même surface que quatre *lunules*.



Solutions page 15.

Léonard, lui aussi, s'intéressa à ces petites lunes en forme de croissant, délimitées par deux arcs de cercle, dont l'un est souvent un demi-cercle.

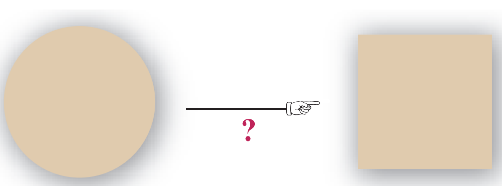
Il savait, par exemple, que le fameux théorème de Pythagore était valable aussi bien pour des carrés que pour toute autre figure. Ainsi :
dans un triangle rectangle, le demi-disque ayant pour diamètre l'hypoténuse a même aire que la réunion des deux demi-disques ayant pour diamètres les côtés de l'angle droit.



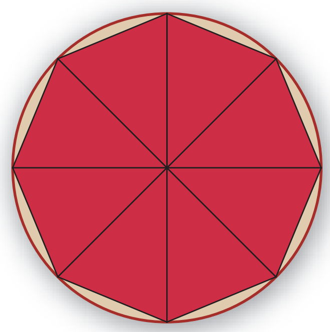
L'égalité des aires des surfaces coloriées en vert et en jaune vient de ce qu'on enlève une même surface (coloriée en rose) à deux surfaces de même aire : d'une part le grand demi-disque (vert et rose), d'autre part les deux demi-disques (jaunes et roses).

Étude de lunules, ***Codex Atlanticus***, Biblioteca Ambrosiana.

Si Léonard s'intéresse aux lunules, c'est évidemment pour trouver des figures limitées par des droites ayant la même surface que des figures limitées par des arcs de cercles. La même question se pose dans la “quadrature du cercle” : est-il possible de construire en un nombre fini d'étapes, à l'aide d'un compas et d'une règle, un carré ayant la même aire qu'un cercle donné ?



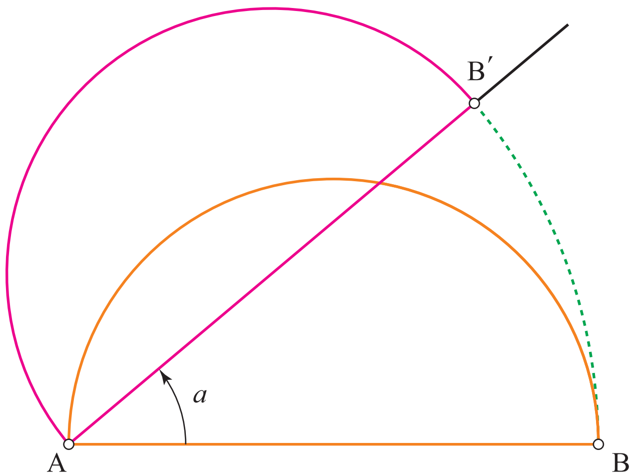
En fait, Archimède et d'autres dont Léonard de Vinci ont parfaitement compris qu'il était possible de découper le cercle en triangles pour que la différence entre la somme des aires des triangles et le cercle soit aussi petite que l'on veut.
(Voyez, sur internet, les animations du Kangourou à l'adresse **www.clubmaths.org**).



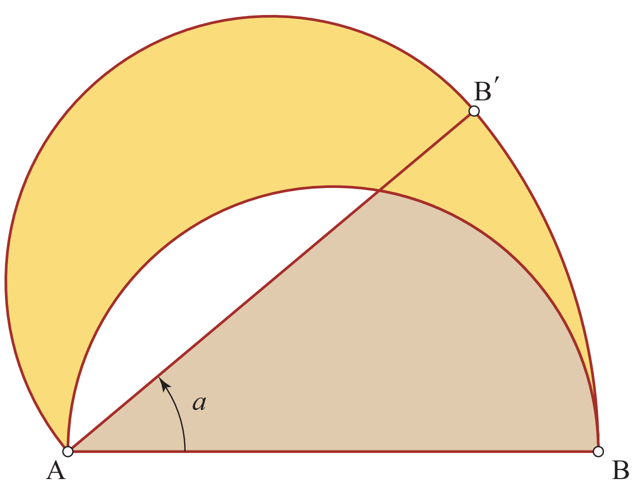
Cela est intéressant, mais n'est pas suffisant…
Finalement, le problème de la quadrature du cercle trouva sa conclusion définitive, en 1882 lorsque le mathématicien allemand Carl von Lindemann démontra qu'elle était tout simplement impossible !
Sans entrer dans le détail de cette démonstration, disons que von Lindemann arriva à montrer, et cela suffit, que le nombre π n'est ni le quotient de deux entiers, ni la solution d'une équation à coefficients entiers.
Dans les carnets de Léonard, on trouve, tracées et sommairement étudiées, jusqu'à 172 figures fabriquées à partir de lunules…

La faux de Léonard

Soit un demi-disque de diamètre [AB] et un angle *a*. Faisons tourner le demi-disque, autour de A, de l'angle *a*.



On obtient un demi-disque de diamètre [AB′].
Et on complète la figure par l'arc BB′ du cercle de centre A et de rayon AB.
L'aire de la *faux* (en jaune) est égale à l'aire du secteur ABB′.



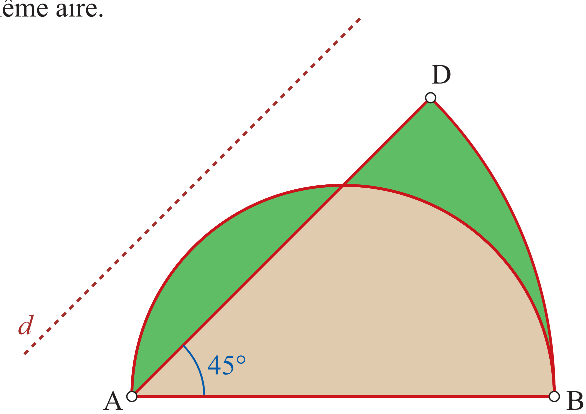
En effet, l'aire de la faux s'obtient à partir du secteur ABB′ en lui ajoutant le demi-disque de diamètre [AB′] et en lui enlevant le demi-disque de diamètre [AB] (qui sont deux demi-disques de même aire).

L'arbalète de Léonard

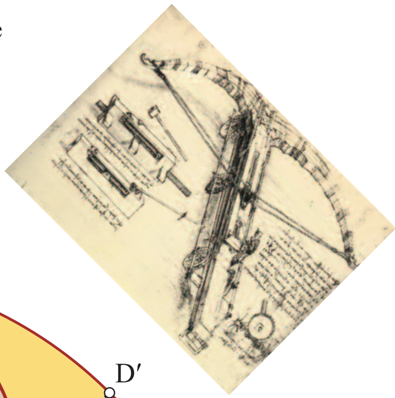
Un demi-disque de diamètre [AB], de rayon $r = \frac{AB}{2}$, a pour aire $\frac{1}{2}\pi r^2$.

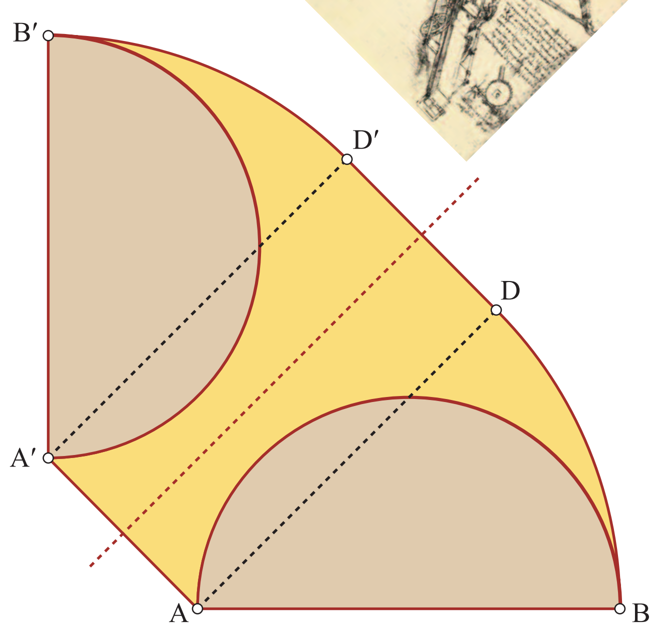
Un secteur ABD, huitième de disque de rayon AB = $2r$, a la même aire : $\frac{1}{8} \times (4\pi r^2) = \frac{1}{2}\pi r^2$.

Alors, en enlevant la partie commune (l'espèce de coin arrondi en beige) on obtient deux surfaces (en vert) de même aire.



Et, en effectuant une symétrie de cette figure, d'axe *d* parallèle à (AD), on obtient une sorte d'arbalète.





D'après l'égalité d'aires évoquée ci-dessus, l'aire de l'arbalète (dessinée en jaune) est égale à celle du rectangle ADD′A′.