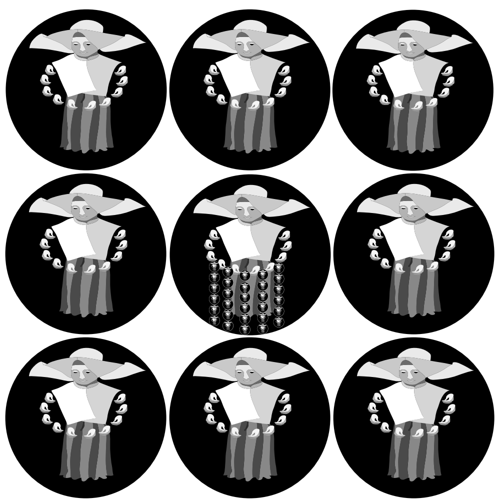
Problème 10

Un couvent est composé de neuf cellules, dont celle du milieu est occupée par une abbesse aveugle, et les autres par ses religieuses. La bonne abbesse pour s'assurer que ses nonnes ne violent point leur clôture, fait une première fois sa visite ; et , trouvant 3 religieuses dans chaque cellule, ce qui fait 9 par bande, elle va se coucher. Quatre religieuses sortent néanmoins : l'abbesse revient au milieu de la nuit compter ses religieuses ; elle les trouve encore neuf par bande, et elle retourne se reposer tranquille sur leur conduite. Ces quatre religieuses rentrent chacune avec un homme : l'abbesse fait une nouvelle visite ; et, comptant 9 personnes par bande, elle est encore dans la sécurité. Il s'introduit encore quatre hommes ; et l'abbesse, comptant toujours 9 dans chaque bande, est dans la persuasion que personne n'est entré ni sorti. On demande comment cela se peut faire ?

Note de l'éditeur : Montucla trouvait ce problème "assez indécent" et l'a remplacé par le suivant, plus politiquement correct, mais susceptible de "moins piquer la curiosité des lecteurs".

Comment peut-on disposer dans les huit cases extérieures d'un carré divisé en neuf, des jetons, de sorte qu'il y en ait toujours 9 dans chaque bande de l'enceinte, et que cependant ce nombre puisse varier depuis 20 jusqu'à 32 ?

(Notes et commentaires, page 42)



La solution de ce problème se trouvera facilement par l'inspection des quatre tableaux qui suivent, dont le premier représente la disposition primitive des jetons dans les cellules du carré ; le second, celle des mêmes jetons lorsqu'on a ôté 4 ; le troisième, comment ils doivent être disposés lorsqu'on en a fait rentrer 4 avec 4 autres ; le quatrième enfin, celle des mêmes jetons lorsqu'on y ajoute encore 4. Il est clair qu'il y en a toujours 9 dans chaque bande d'enceinte ; et cependant, dans le premier cas, il y en a en tout 24, dans le second, 20, dans le troisième 28, et le quatrième 32.

I

3	3	3
3		3
3	3	3

II

4	1	4
1		1
4	1	4

III

2	5	2
5		5
2	5	2

IV

1	7	1
7		7
1	7	1

On peut pousser la chose plus loin et faire entrer encore 4 hommes au couvent, sans que son abbesse s'en aperçoive ; et puis faire sortir tous les hommes avec six religieuses, de sorte qu'il n'en reste plus que 18, au lieu de 24 qu'elles étaient primitivement.

Les deux tableaux suivants en montrent la possibilité.

V

0	9	0
9		9
0	9	0

VI

5	0	4
0		0
4	0	5

Il est sans doute assez superflu de montrer d'où provient l'illusion de la bonne abbesse. C'est que les nombres qui sont dans les cases angulaires du carré sont comptés deux fois, ces cases étant communes à deux bandes. Ainsi, plus on charge les cases angulaires, en vidant celles du milieu de chaque bande, plus on fait de ces doubles emplois ; ce qui fait qu'il paraît y avoir toujours le même nombre, tandis qu'il est diminué. Le contraire arrive à mesure qu'on charge les cases du milieu, en vidant les cases angulaires ; ce qui fait qu'on est obligé d'y ajouter quelques unités pour avoir 9 dans chaque bande.

problème 10

• Toute cette histoire n'est possible que grâce à la négligence de l'abbesse. Elle doit vérifier la valeur de 8 nombres (les effectifs dans les 8 cellules formant le carré) ; et elle ne vérifie que la valeur de 4 nombres (les sommes sur les côtés).

c_1	m_1	c_2
m_4		m_2
c_4	m_3	c_3

Cela laisse 4 degrés de liberté dont les religieuses profitent intelligemment… En fait Ozanam aurait pu faire varier très largement tous ces nombres en respectant les égalités
$c_1 + m_1 + c_2 = c_2 + m_2 + c_3 = c_3 + m_3 + c_4 = c_4 + m_4 + c_1 = 9$.
Voici, par exemple, deux dispositions respectant les vérifications :

5	2	2
3		3
1	4	4

et

4	3	2
5		6
0	8	1

La première ne correspond qu'à un simple déplacement des religieuses les unes chez les autres ; il y a bien 9 personnes par côté et toujours 24 personnes au total.
Mais la deuxième aura permis l'intrusion de 5 hommes : il y a bien toujours 9 personnes par côté mais 29 personnes au total.
En fait, pour l'esthétique de l'exercice, Ozanam s'est imposé l'égalité des nombres aux quatre coins, ainsi que l'égalité des nombres dans les cellules des milieux de chaque côté. Cela donne 6 égalités : $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ et $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$; les égalités des quatre côtés se réduisent alors à une seule : $m + 2c = 9$.
L'exercice d'Ozanam impose donc 7 égalités et il reste donc 1 degré de liberté aux religieuses, celui de choisir m (qui peut valoir 1, 3, 5, 7 ou 9).