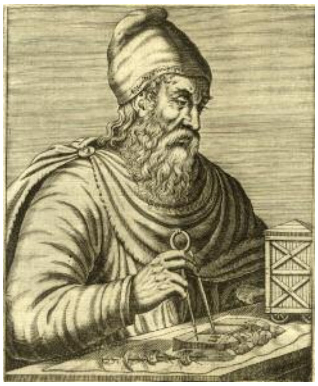
La première édition imprimée des œuvres d'Archimède qui nous est parvenue est l'édition dite de Bâle (1544). Elle contient une version latine et une version grecque, dont nous reproduisons ci-dessous une page : le début de la *Mesure du cercle*, *Kykloy metresis*.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ α β γ δ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ α γ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ ν ξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ν ξ ἐστὶ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶ λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ ἐστὶ τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ο α ρ. ἡ ο ρ ἄρα ἐστὶ μ ρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρ μ τῇ ρ α ἴση ἐστί. καὶ τὸ ρ ο π τρίγωνον ἄρα τοῦ ο ζ α μ σχήματος μεῖζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ π ζ α τομεῖς ὅμοιοι ἐλάσσους ἐστὶ ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ α β γ δ κύκλου. ἐστὶν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ν α ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.



Archimède, De la mesure du cercle

Ce texte d'Archimède est difficile à lire sans les notations d'aujourd'hui. C'est pourquoi nous avons essayé de le suivre fidèlement avec nos « commentaires et explications ». Et, si nous nous arrachons quelques cheveux, faisons-le en hommage à l'acharnement des premiers calculateurs qui n'avaient pas nos outils.

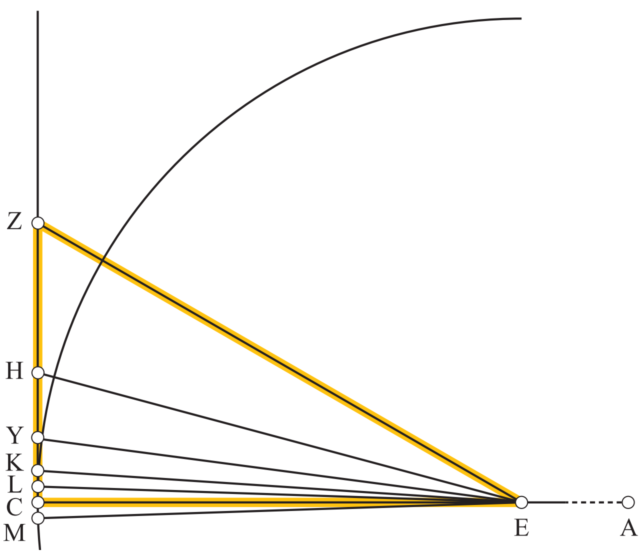
(Le texte ci-dessous est extrait des *Œuvres complètes d'Archimède*, traduction de Paul Ver Eecke, édition Blanchard, 1960).

Texte d'Archimède

Proposition III

Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzièmes parties du diamètre.

Soit un cercle, un diamètre AC, le centre E, une tangente CZ et l'angle ZEC, tiers d'un angle droit. Dès lors le rapport de EZ à CZ est celui de 306 à 153, tandis que le rapport de EC à CZ est celui de 265 à 153.



Partageons l'angle ZEC en deux parties égales par la droite EH ; dès lors ZE est à EC comme ZH est à HC.

Par conséquent, la somme de ZE, EC est à ZC comme EC est à HC ; de manière que le rapport de EC à HC soit égal à (mais plutôt un peu plus grand que) celui de 571 à 153.

Commentaires et explications

Autrement dit, π (soit 3,141592…) est compris entre 3 + 10/71 (soit 3,140845…) et 3 + 10/7 (soit 3,142857…).

L'angle ZEC vaut 30° et son sinus CZ/EZ vaut 153/306 (soit 1/2) et sa tangente CZ/EC vaut $\sqrt{3}/3$.

Pour Archimède EC/CZ vaut 265/153 (soit 1,732026… qui est une bonne valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$, égal à 1,732050…).

D'où vient cet entier 153 ?

265/153 est la meilleure approximation de $\sqrt{3}$ par une fraction de dénominateur inférieur ou égal à 200, comme le montre la théorie des développements en fraction continue ; on a en effet

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}}} \approx \frac{265}{153}$$

Le théorème du partage par la bissectrice indique : la bissectrice d'un angle d'un triangle partage le côté opposé dans le rapport des deux autres côtés.

Donc si EH est la bissectrice en E du triangle ZEC, alors ZE/EC = ZH/HC.

On a 1 + ZE/EC = 1 + ZH/HC, ou

(ZE + EC)/EC = (ZH + HC)/HC = ZC/HC ;

d'où (ZE + EC)/ZC = EC/HC.

Or ZE/ZC = 306/153 et EC/ZC = 265/153 par défaut ;

donc EC/HC = 571/153 par défaut.

Texte d'Archimède

Dès lors, le rapport du carré de EH au carré de HC est égal à celui de 349450 à 23409 ; donc le rapport des racines est égal à celui de 591 1/8 à 153.

Que l'angle HEC soit de nouveau divisé en deux parties égales par la droite EY. Dès lors, de même, le rapport de EC à CY sera plus grand que celui de 1162 1/8 à 153 ; par conséquent, le rapport de EY à YC sera égal à (mais plutôt un peu plus grand que) celui de 1172 1/8 à 153.

Que l'angle YEC soit de nouveau divisé en deux parties égales par la droite EK. Dès lors, le rapport de EC à CK sera plus grand que celui de 2334 1/4 à 153 ; par conséquent, le rapport de EK à KC sera égal à (mais plutôt un peu plus grand que) celui de 2339 1/4 à 153.

Que l'angle KEC soit de nouveau divisé en deux parties égales par la droite EL.
Le rapport de EC à LC sera égal à (mais plutôt un peu plus grand que) celui de 4673 1/2 à 153.

Puisque l'angle ZEC, qui est le tiers de l'angle droit, a été divisé quatre fois en deux parties égales, l'angle LEC sera la quarante-huitième partie de l'angle droit.
Faisons donc l'angle CEM égal à cet angle LEC. L'angle LEM est la vingt-quatrième partie de l'angle droit, et, par conséquent, la droite LM est le côté du polygone de 96 côtés circonscrit au cercle.
Donc, puisqu'il a été démontré que le rapport de EC à LC est égal à (mais un peu plus grand que) celui de 4673 1/2 à 153, tandis que AC est le double de EC et que LM est le double de LC, il en résulte que la rapport de AC (diamètre du cercle) au périmètre du polygone de 96 côtés est aussi égal à (mais un peu plus grand que) celui de 4673 1/2 à 14 688.

De plus, ce dernier nombre est le triple du premier augmenté de 667 1/2, qui est moindre que la septième partie de 4673 1/2 ; de manière que le polygone circonscrit au cercle est un peu plus petit que le triple

Commentaires et explications

Le théorème de Pythagore dans le triangle EHC donne
$EH^2 = HC^2 + EC^2$, donc
$EH^2/HC^2 = 1 + EC^2/HC^2 = 1 + 326\,041/23\,409$
$= 349\,450/23\,409$.
Et $\sqrt{349\,450} = 591,142\ldots$, proche de $591 + \frac{1}{8} = 591,125$.

À partir d'un angle ZEC, égal à 30°, Archimède effectue les divisions successives de cet angle en deux.
Le théorème du partage par la bissectrice lui permet en effet de calculer les longueurs des segments de tangente (qui seront les demi-côtés de polygones exinscrits au cercle).
En choisissant le rayon EC pour unité,
il trouve ainsi successivement,
après une utilisation accessoire du théorème de Pythagore :
HC, vu sous un angle de 15°, de longueur 153/571 ;

YC, vu sous un angle de 7,5°, de longueur 153/1162 1/8 ;

KC, vu sous un angle de 3,75°, de longueur 153/2334 1/4 ;

LC, vu sous un angle de 1,875°, de longueur 153/4673 1/2.

Ce dernier angle LEC est la 48e partie de 90°,
car $48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

L'angle LEM est la (24×4)e partie du cercle.

L'angle LEM est donc la 96e partie du cercle.

Le périmètre du cercle est ainsi approché (par défaut) par le périmètre du polygone régulier à 96 côtés :
$14\,688 = 96 \times 153$.
Notez que $14\,688/4673,5 = 3,1428\ldots$

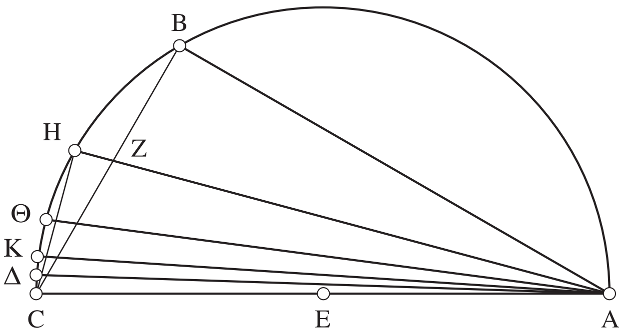
« ce dernier nombre » : 14 688.
$14\,688 = (3 \times 4673\ 1/2) + 667\ 1/2$;
et $667\ 1/2 \times 7 = 4\,672\ 1/2$.

Texte d'Archimède

augmenté d'un peu plus d'un septième du diamètre. En conséquence, la circonférence du cercle est a fortiori un peu plus petite que le triple augmenté d'un septième du diamètre.

Commentaires et explications

Après avoir cherché (et trouvé) une valeur approchée par excès de π, en approchant le cercle par des polygones circonscrits au cercle, Archimède va chercher (et trouver) une valeur approchée par défaut de π, en approchant le cercle par des polygones inscrits dans le cercle.



Soit un cercle de diamètre AC et un angle BAC qui soit le tiers de l'angle droit. Dès lors, le rapport de AB à BC est moindre que celui de 1351 à 780, tandis que le rapport de AC à BC est celui de 1560 à 780…
… la circonférence du cercle vaut trois fois le diamètre plus une partie inférieure au septième, mais supérieure aux 10/71 du diamètre.

L'approximation de $\sqrt{3}$ par 1351/780 s'obtient, comme précédemment, à partir des développements en fraction continue. Elle est bien meilleure que celle (265/153) utilisée pour obtenir la valeur par excès. Mais Archimède a été obligé de pousser jusque-là pour assurer finalement un bon encadrement de π.

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

$$3,1408 < \pi < 3,1429.$$

Ces pages sont extraites de l'ouvrage
Le nombre d'Archimède : π
ISBN : 978-2-87694-189-2