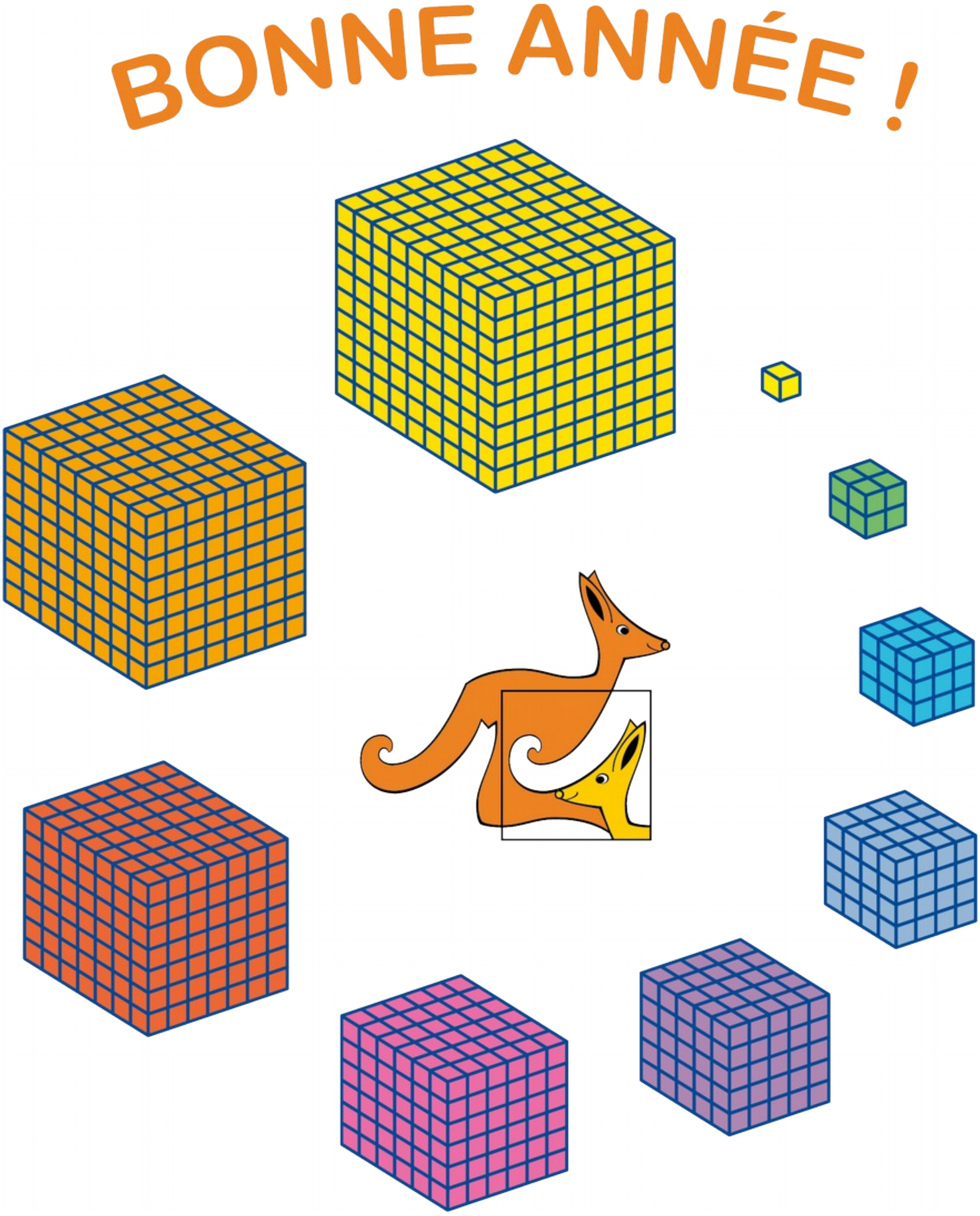


Combien y a-t-il au total de petits cubes dans les 9 cubes représentés sur cette image ?

Premiers entiers, carrés et cubes

La réponse à la question de la première page est 2025.
2025 est un remarquable millésime mathématique :

45 est la somme des 9 premiers entiers non nuls et 2025 est le carré de 45 :

$$\mathbf{45 \times 45 = 2025}$$

Les carrés des nombres à deux chiffres se terminant par 5 se calculent aisément de tête.
En effet $(10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25$,
et donc 45×45 c'est $100(4\times5) + 25$ soit 2025 !

Et on peut aussi calculer assez vite des carrés de nombres plus grands se terminant par 5 :

$605\times605 = 366\,025$, car $60\times61 = 3660$;
$755\times755 = 570\,025$, car $75\times76 = 5700$;
et $2025\times2025 = 4\,100\,625$, car $202\times203 = 41\,006$.

Mais, on a aussi une magnifique égalité :

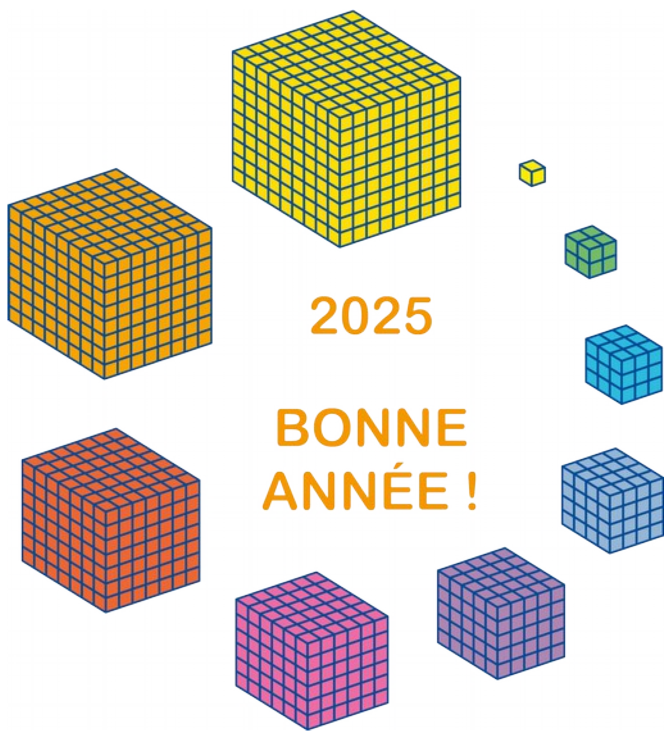
le carré de la somme des *n* premiers entiers est la somme des *n* premiers cubes,

$$\mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

qui donne pour $n=9$:

$$\mathbf{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3 = \left[\frac{9\times10}{2}\right]^2 = 45^2 = 2025}$$

et la belle figure représentant 2025 petits cubes :



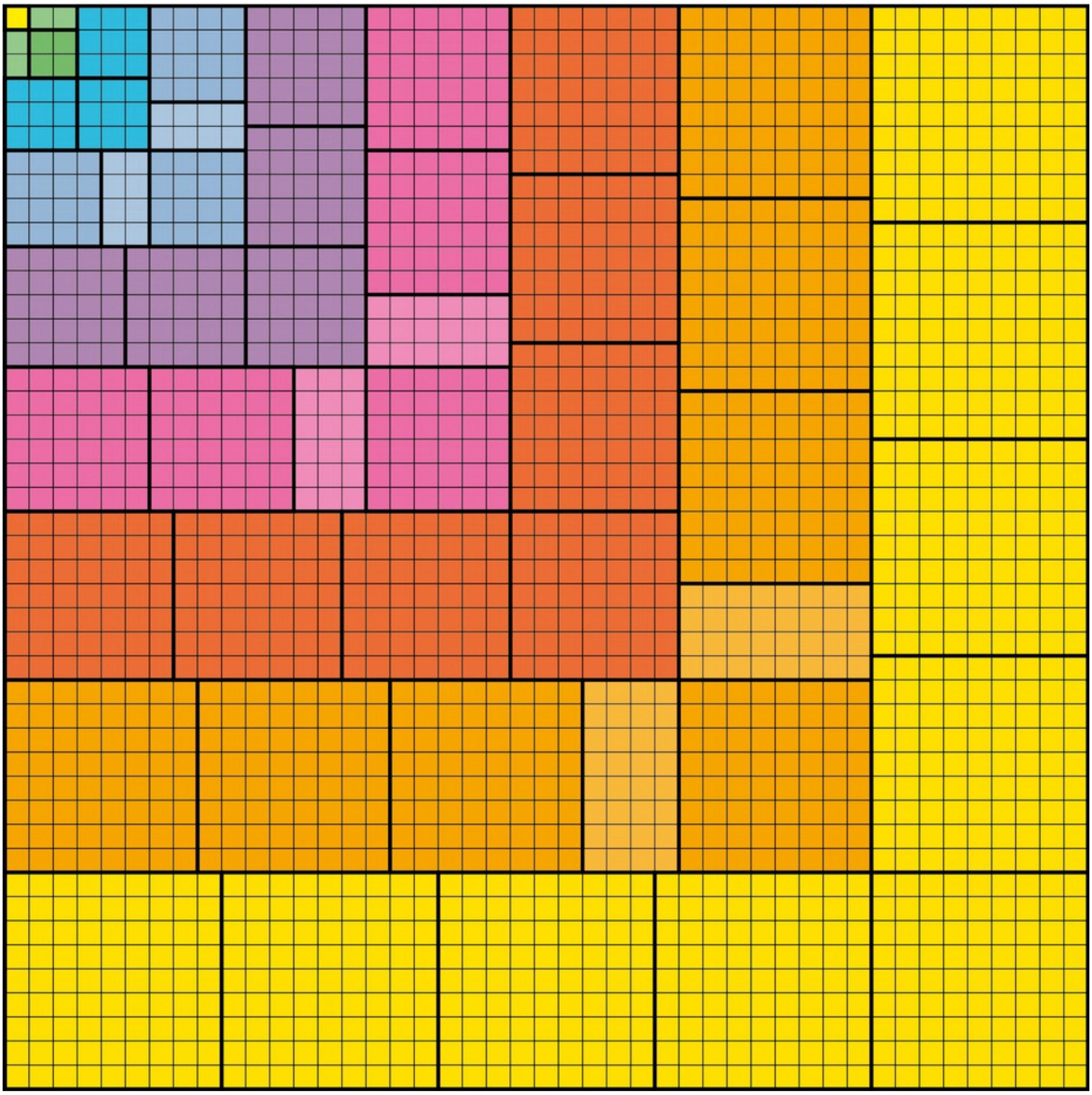
On peut évidemment démontrer par récurrence la formule

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 \;=\; (1+2+3+\cdots+n)^2 \;=\; \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Mais il serait dommage de se priver d'une preuve en image qui se suffit en elle-même et qu'on peut retrouver page 22 dans *Preuves en images, Tome 2,* aux *Éditions du Kangourou*.
Voyez https://www.mathkang.org/catalogue/prodpej.html.

$$2025 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$$

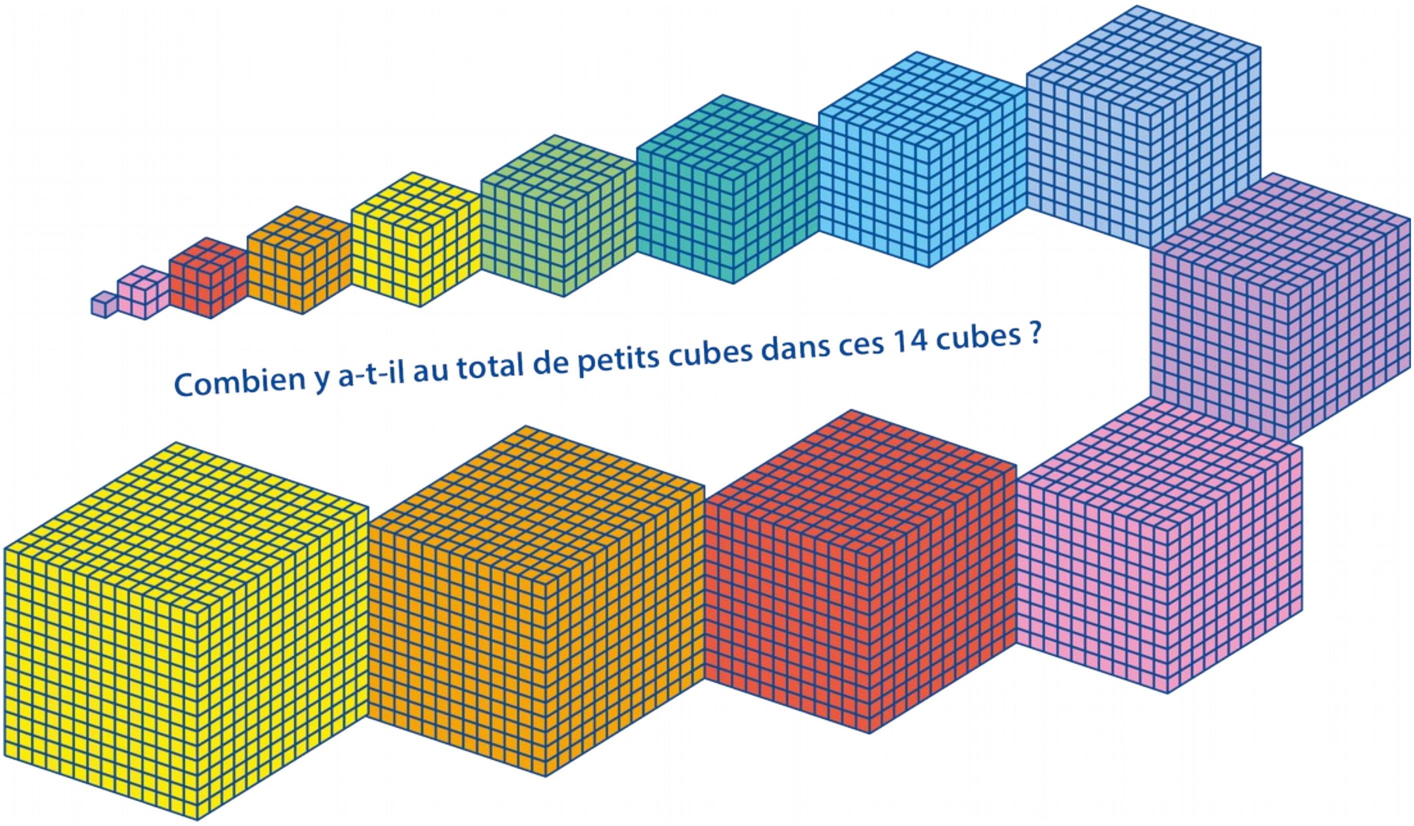
$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$



On a ici $1+2+3+\cdots+n$ dans deux directions perpendiculaires,
ce qui donne $(1+2+3+\cdots+n)^2$ petits carrés.

Et ces petits carrés peuvent être regroupés (les couleurs permettent une bonne visualisation) de manière à avoir chaque carré $k\times k$ reproduit k fois, pour former k^3 petits carrés unités (tranquillement pour k impair et avec un recollement pour k pair).

Maintenant vous pouvez, de tête et en quelques secondes, répondre à cette question :



Jean-Philippe Deledicq

Réponse : 11 025 cubes.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14 = \frac{14\times 15}{2} = 7\times 15 = 70+35 = 105.$$

$$105^2 = (10\times 11)100+25 = 11025.$$

Kangourou des mathématiques
12 rue de l'épée de bois
75005 PARIS

www.mathkang.org