

À table ! ... chez Pythagore.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

On peut découvrir de très nombreuses propriétés dans une table de multiplication.

Les Malices du *Kangourou des collèges 2026* en dévoileront des dizaines.

En voici deux, en avant-première :

. Les sommes des résultats dont les cases forment une croix grecque (+) ou une croix de saint André (x) de même centre et de même dimension sont égales.

. Les cubes des entiers se retrouvent égaux à la somme des résultats dont les cases forment certaines équerres.

Les croix + et x

Lorsqu'on superpose un « + » et un « x » de même taille et de même centre, n'importe où sur la table de Pythagore, la somme des termes du « + » est égale à la somme des termes du « x ».

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$6+12+18+24+30+36+42+12+16+20+28+32+36 = 312$$

$$3+8+15+24+35+48+63+21+24+25+21+16+9 = 312$$

Pour démontrer ce résultat, Il suffit de montrer que la somme des 4 cases aux extrémités des croix + et x sont égales.

La case du centre étant la case $a \times b$ et la longueur des branches valant p :

$$a(b-p) + a(b+p) + (a-p)b + (a+p)b = 4ab.$$

$$(a-p)(b-p) + (a+p)(b+p) + (a+p)(b-p) + (a-p)(b+p) = 4ab.$$

Sur l'exemple, on a choisi $a=4$, $b=6$, et $p=3$ pour la longueur des branches.

Et les sommes aux extrémités sont :

$$12 + 36 + 6 + 42 = 96 \text{ et } 3 + 63 + 9 + 21 = 96.$$

Les cubes des nombres

Les nombres sur la diagonale d'une table de multiplication sont la suite des nombres carrés.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Mais on peut aussi retrouver les nombres **cubes des entiers** dans la table de multiplication !
Il suffit d'**additionner les nombres de chaque équerre en couleur** sur la table ci-contre.

Vérification :

$$1 = 1 \times 1 \times 1$$

$$2 \times 2 + 4 = 8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$2 \times (3 + 6) + 9 = 27 = 3 \times 3 \times 3$$

$$2 \times (4 + 8 + 12) + 16 = 64 = 4 \times 4 \times 4$$

$$2 \times (5 + 10 + 15 + 20) + 25 = 125 = 5 \times 5 \times 5$$

$$2 \times (6 + 12 + 18 + 24 + 30) + 36 = 216 = 6 \times 6 \times 6$$

$$2 \times (7 + 14 + 21 + 28 + 35 + 42) + 49 = 343 = 7 \times 7 \times 7$$

$$2 \times (8 + 16 + 24 + 32 + 40 + 48 + 56) + 64 = 512 = 8 \times 8 \times 8$$

$$2 \times (9 + 18 + 27 + 36 + 45 + 54 + 63 + 72) + 81 = 729 = 9 \times 9 \times 9$$

Mais il y a une autre nouvelle et étonnante manière de retrouver les nombres cubes dans une table de multiplication :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

En effet, en ajoutant les nombres écrits sur chaque équerre rouge successive, on trouve :

$$1$$

$$1 + 4 + 3 = 8$$

$$1 + 4 + 9 + 8 + 5 = 27$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + 15 + 12 + 7 = 64$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 24 + 21 + 16 + 9 = 125.$$