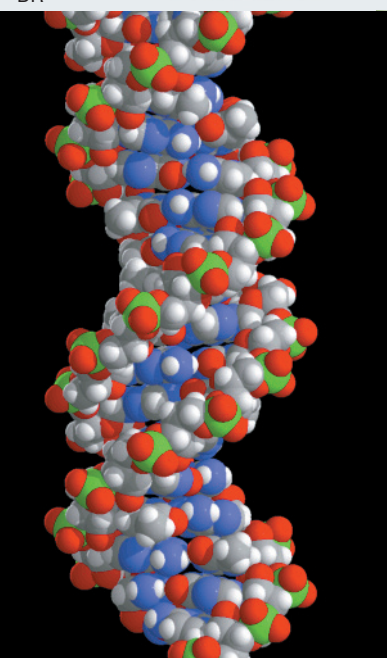


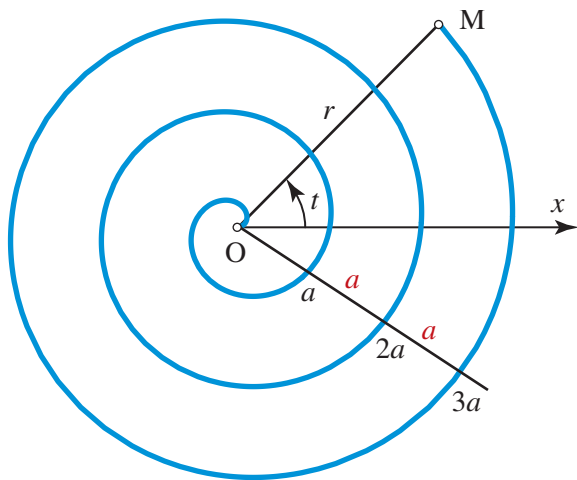
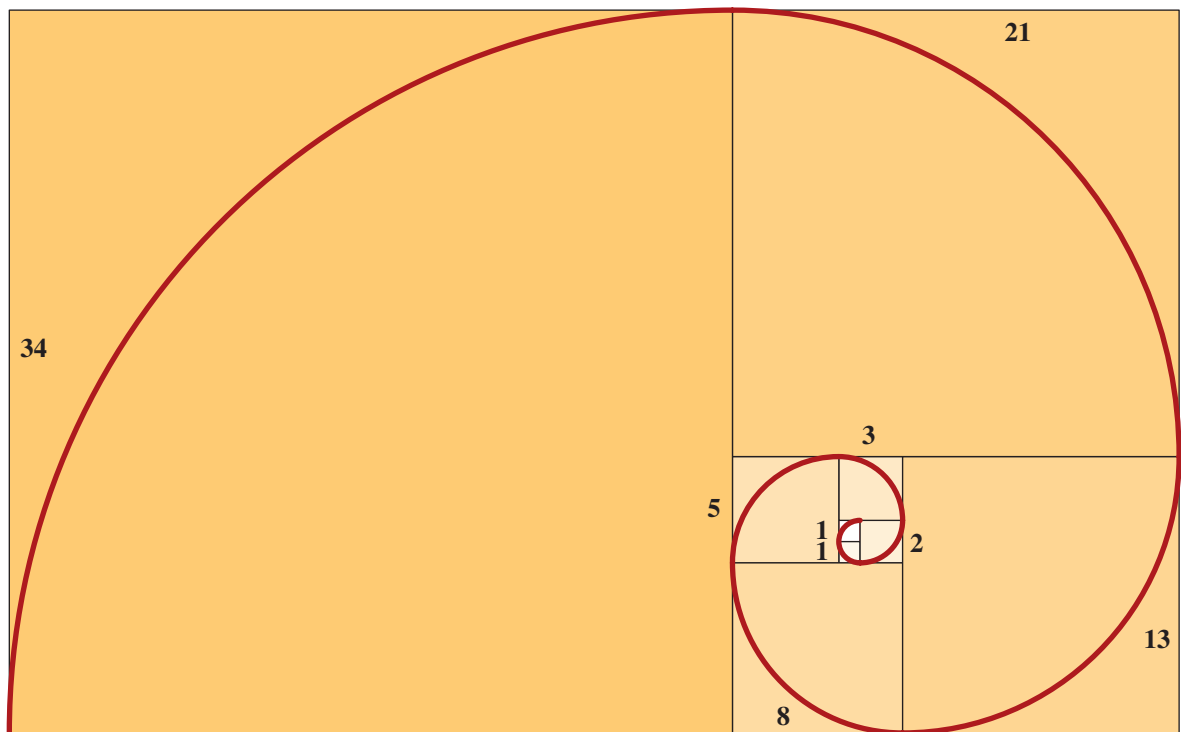
Des spirales

Les mathématiques sont le langage de l'univers, disait Galilée. En particulier, elles sont présentes dans les *courbes* que l'on retrouve aussi bien dans l'infiniment petit que dans l'infiniment grand. Témoins, cette molécule d'ADN, cette coquille de nautilus, cette jeune pousse de fougère ou cette galaxie lointaine. Les pages suivantes montrent ainsi quelques spirales, courbes effectivement très répandues. Et ces *malices du Kangourou* vous en propose de bien belles dans le domaine mathématique, en espérant qu'en apprenant à les reconnaître, vous commencerez à les aimer...

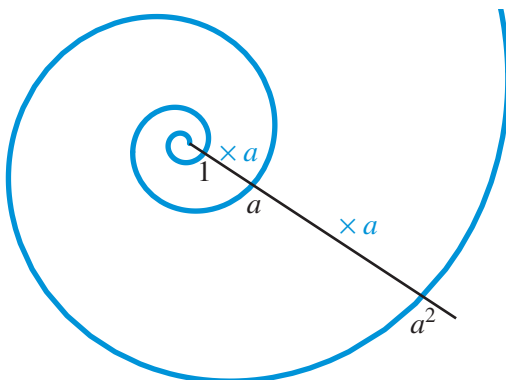
DR



Les fleurs groupées dans le capitule d'une pâquerette ou d'un tournesol semblent former deux familles de spirales. Si on arrive à les compter, on constate qu'il y a en général 34 spirales dans un sens et 21 dans l'autre. Les écailles de l'ananas et de la pomme de pin présentent le même type d'assemblage ; on y compte généralement 8 spirales dans un sens et 5 ou 13 dans l'autre. Que viennent faire ici les nombres d'une suite bien connue dans laquelle chaque terme vaut la somme des deux précédents : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... (suite de Fibonacci) ? La manière dont se forment les assemblages de cellules végétales a donc quelque chose à voir avec la construction d'une spirale de carrés à partir d'un petit carré, comme on le voit sur la figure du haut de la page suivante : chaque nouveau carré appuie son côté sur les deux précédemment construits.

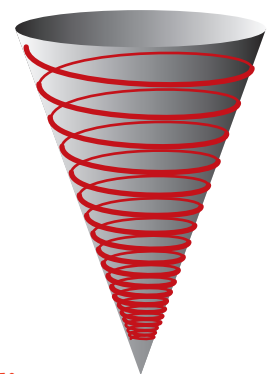
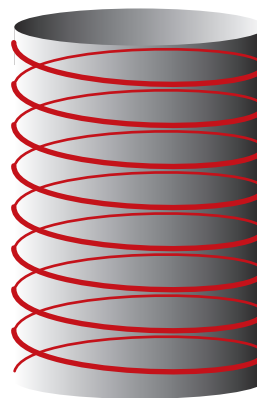


La spirale d'Archimède

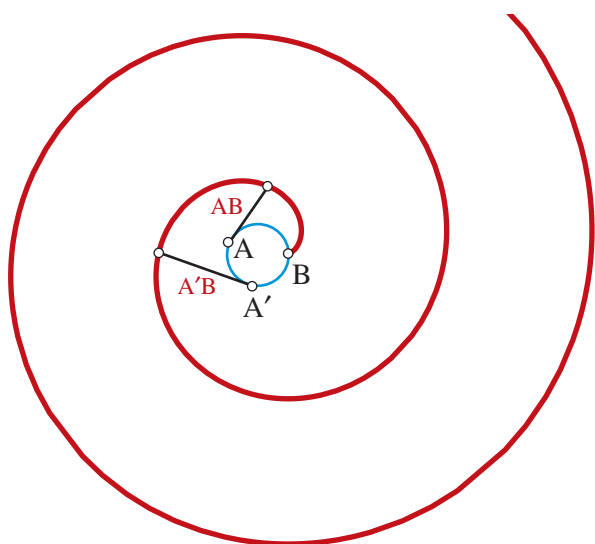


La spirale logarithmique

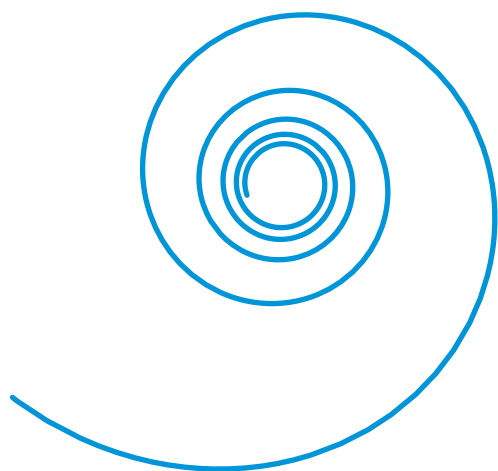
Un vertige : celui de la rotation.
 Un désir : celui de l'expansion.
 C'est donc la composition de deux mouvements de l'âme qui donne naissance à des spirales. Cela dans un espace à deux dimensions, car lorsque l'expansion se développe dans un plan différent de celui de la rotation, les courbes obtenues sont les grandes sœurs des spirales : ce sont des hélices. Mathématiquement, une ligne spirale est facile à définir à condition d'utiliser un repérage des points du plan adapté à la nature des courbes qui nous intéressent : un point O et une demi-droite Ox sont fixés comme base de repérage ; tout point M du plan est alors bien repéré par sa distance r au point O et par l'angle t de Ox et de OM. Un point M décrit alors une spirale si r est une fonction monotone de t .



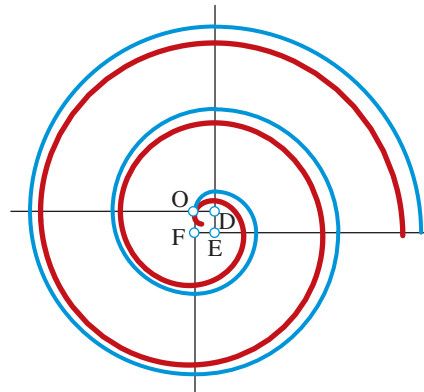
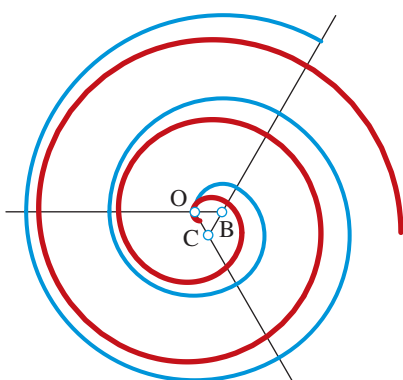
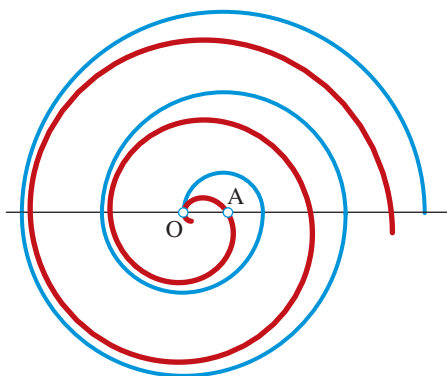
Hélices



Développante de cercle



Spirale hyperbolique



Constructions approchées d'une spirale d'Archimède

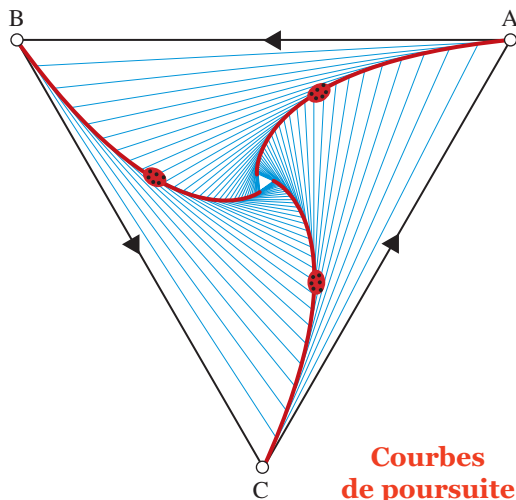
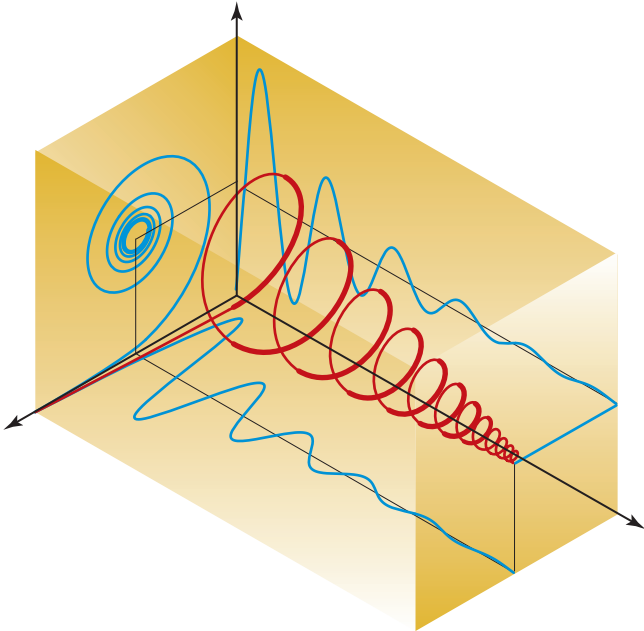
Il y a beaucoup de fonctions monotones bien différentes les unes des autres et il y aura donc autant de spirales. Voici quelques unes des plus connues :

- la spirale d'**Archimède** : $r = at$.
- la spirale **logarithmique** : $r = k^t$, dont les spires s'éloignent exponentiellement les unes des autres.
- La développante de cercle décrite par la chèvre de Monsieur Seguin tirant sur sa corde enroulée autour d'un piquet.
- la spirale **hyperbolique** : $r = \frac{1}{t}$, qui est l'ombre d'une hélice placée au soleil.
- la spirale de **Fermat** : $r = a\sqrt{t}$, dans laquelle la différence entre les aires comprises entre deux spires successives est constante (voir page 7).
- le « **lituus** » : $r = \frac{a}{\sqrt{t}}$, qui ressemble à une crosse d'évêque (voir l'illustration, page 7).
- la spirale de **Galilée** : $r = 1 - at^2$, pour laquelle Pierre de Fermat a montré qu'elle est la trajectoire d'un point qui se déplacerait librement à l'intérieur de la Terre.
- la spirale de **Cornu** (1880) ou « clothoïde », projection d'une espèce de tire-bouchon dont les autres projections sont des « sinusoïdes amorties » (voir page 6).
- une spirale à cercle « asymptote » : $r = \frac{t}{(1+t)}$, qui ne s'éloigne pas à l'infini...

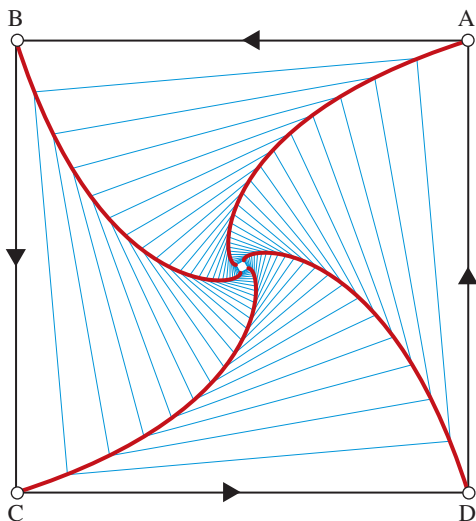
Mais il y a aussi des spirales « paraboliques », « cubiques », « tractrices », ... et vous pouvez inventer, vous aussi, des spirales aux équations plus ou moins complexes.

Chaque fois qu'il y a proportionnalité entre un mouvement expansif et un mouvement rotatif, il y a quelque part une spirale d'Archimède. Ainsi le sillon du tourne-disque, le câble lové sur le pont du bateau... Les dessinateurs en connaissent bien l'approximation obtenue en traçant des arcs de cercle tangents dont les centres sont successivement deux, trois ou plus de trois points (comme le montrent les figures ci-dessous).

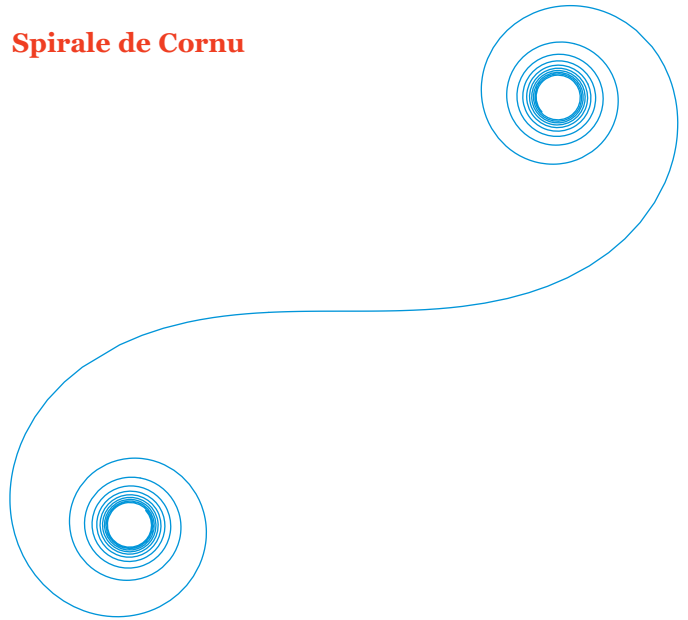
Projections d'une hélice



**Courbes
de poursuite**

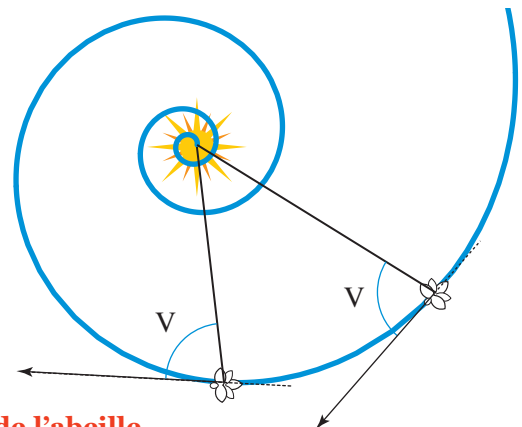


Spirale de Cornu

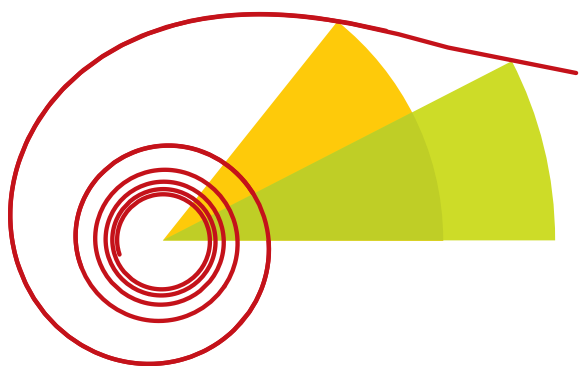


Chaque fois qu'un mouvement circulaire exerce un effet multiplicatif sur un mouvement linéaire, il y a quelque part une **spirale logarithmique**.

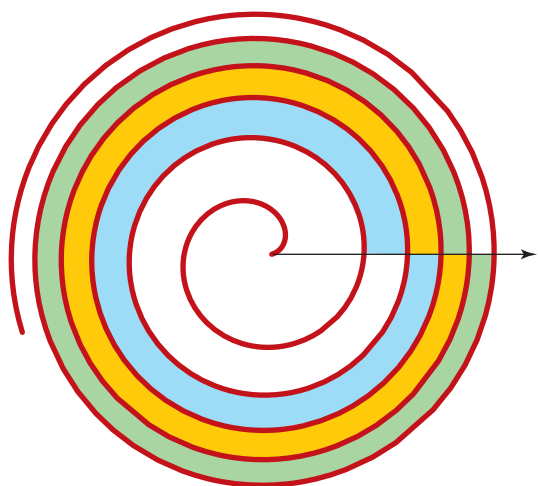
C'est le cas du *Nautilus*, et de nombreux coquillages, dont chaque spire s'appuie sur les spires déjà obtenues les années précédentes. Mais on obtient aussi ce type de spirale lorsque plusieurs coccinelles, disposées initialement aux sommets d'un polygone, se poursuivent l'une l'autre en courant à même vitesse (voir les dessins en marge). La spirale logarithmique a aussi une propriété qui émerveilla tellement Jacques Bernoulli qu'il la fit tracer sur sa tombe : un mobile qui se déplace en faisant toujours un angle V constant avec la droite qui le joint à un point fixe O décrit une spirale logarithmique de centre O ; c'est ainsi qu'une abeille observant une source lumineuse O toujours sous le même angle, une des facettes de son œil étant toujours dirigée vers cette source, décrit une spirale logarithmique autour de la lumière.



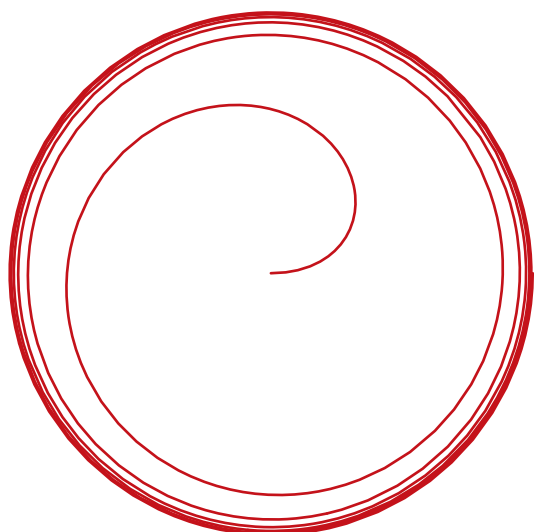
Le vol de l'abeille



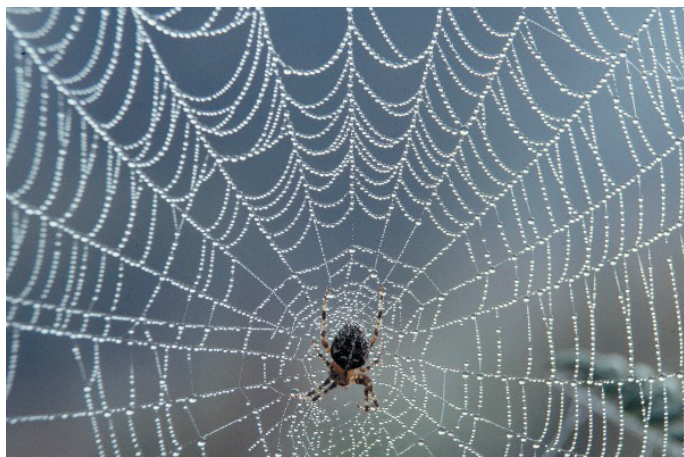
Le « lituus »



Spirale de Fermat



Une spirale à cercle asymptote



DR

Également, l'araignée, tenant son appareil sécréteur toujours orienté dans la même direction par rapport au rayon d'appui, s'éloigne en général du centre de sa toile en faisant un angle constant avec les rayons. Jean-Henri Fabre a pu écrire, sur ce phénomène, des pages magnifiques, dont voici une petite idée :

« Portons notre attention sur le trait le plus remarquable de l'industrie arachnéenne : l'*épeire soyeuse* et l'*épeire fasciée*, si fréquentes en automne, ourdissent en effet une belle rosace digne de notre compas ; leur édifice funiculaire consiste en une série de traverses qui coupent obliquement les divers rayons sous des angles de valeur invariable ! ... Et les *ammonites*, véritables reliques de ce qui fut autrefois la plus haute expression des vivants, lorsque s'ébauchait la terre ferme avec les boues océaniques exondées : taillé et poli dans le sens de sa longueur, le fossile nous montre une superbe spirale logarithmique, norme générale de l'habitation qui fut un palais de nacre, à chambres multiples traversées d'un siphon... »



DR