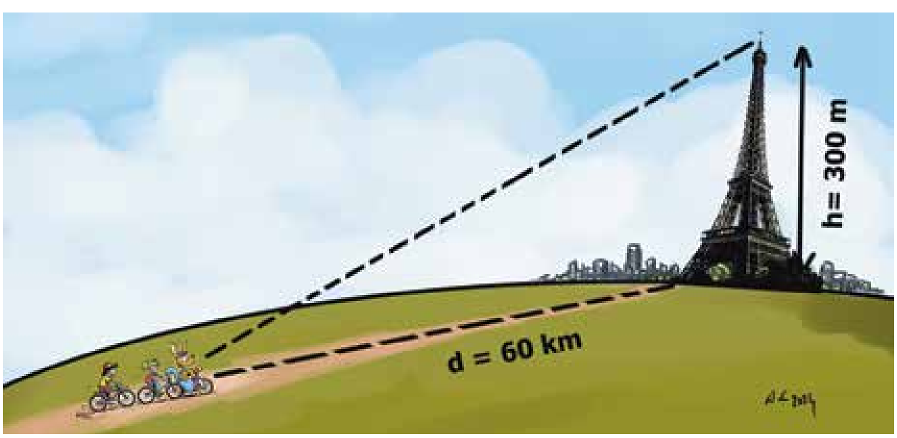
Distance à l'horizon & Formule d'Odier-Sauveur

Alice, **Matt** et **Kangy**, roulaient tranquillement à vélo sur une route de Beauce, entre Chartres et Paris, lorsqu'ils aperçurent à l'horizon une petite pointe noire.

Cela ressemble à la pointe de la Tour Eiffel. Et je crois pouvoir en déduire la distance qui nous sépare d'elle…

Et tu peux faire le calcul en continuant à pédaler sur ton vélo ?

Aucun problème, les calculs se font de tête, j'ai une formule magique !



La formule magique, connue de Kangy, a été découverte au début du xx^{e} siècle par un ingénieur des *Arts et Métiers* qui fut un des pionniers de l'aviation, Antoine Odier :

Si la hauteur d'un machin est *h*, et si on en voit le haut juste à l'horizon, alors la formule

$$d \times d = 12 \times h$$

est, à peu de choses près, exacte, à condition d'exprimer *h* en mètres et *d* en kilomètres.

La tour Eiffel fait 300 mètres de haut ! Donc $d \times d$ vaut 3600. Et, puisque 6 fois 6 valent 36, la distance d vaut 60 kilomètres.

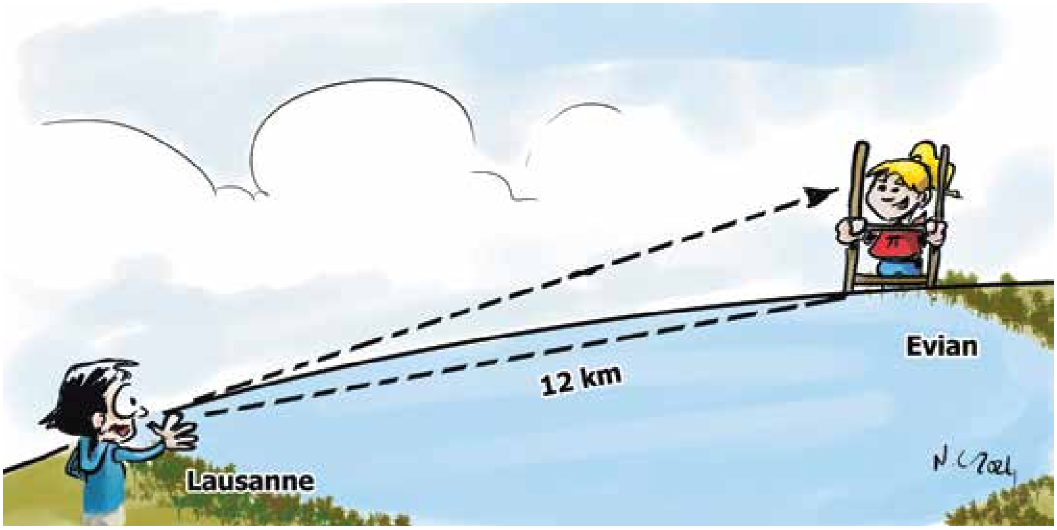
Oui, facile !
Donne-nous d'autres exemples, Kangy !

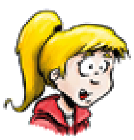
Imagine un mousse, au sommet du mat d'un ancien bateau à voile. Il guette l'apparition de la côte. De là où il est, à 33 mètres de haut, il l'aperçoit et crie « Terre ! » ; à quelle distance le bateau est-il de la côte ?

Alors, 12 fois 33, ça fait $4 \times 3 \times 33$, soit environ 400. Et 400, c'est 20 fois 20. Le bateau est à 20 km de la terre !

Super ! Encore un exemple, Kangy !

Tu te souviens, Alice, quand vous étiez en vacances à Évian au bord du lac Léman ? Tu étais restée à la plage et Matt était allé à Lausanne avec ta tante. Vous étiez alors à 12 km l'un de l'autre, mais, depuis les rives du lac, vous ne pouviez pas vous voir, à cause de la courbure de la Terre ! De combien aurais-tu dû monter à une échelle pour voir Matt en entier ?





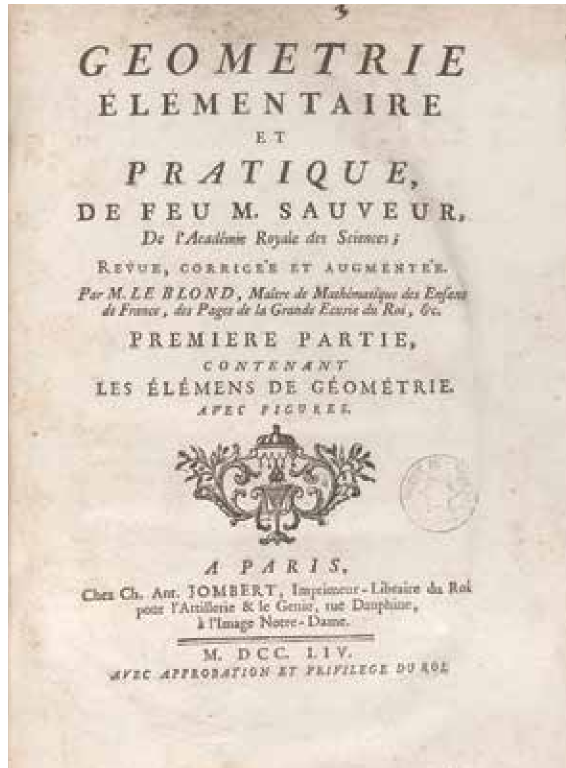
Bon ! $d \times d = 12 \times h$, donc $12 \times 12 = 12 \times h$, donc $h = 12$. C'est trop facile, 12 mètres !

Attends, j'ai un problème plus difficile. Quand je suis allé à Barcelone en avion, je regardais la France par un hublot à 5000 mètres de haut. Quel pouvait être le rayon de tout ce que je voyais ?

Je calcule $d \times d = 12 \times 5000$, soit 60 000.
Je sais que $25 \times 25 = 625$.
Donc $250 \times 250 = 62\,500$.
Tu voyais donc jusqu'à environ 250 km.

Bon ! On a assez calculé sur notre vélo, et il fait chaud ! Bravo ! Antoine Odier serait content de voir un tel usage de sa formule.
Mais revenons à notre balade, il nous reste 60 km à faire…

La formule de Joseph Sauveur


GEOMETRIE
ÉLÉMENTAIRE
ET
PRATIQUE,
DE FEU M. SAUVEUR,
De l'Académie Royale des Sciences;
REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.
Par M. LE BLOND, Maître de Mathématiques des Enfans de France, des Pages de la Grande Ecurie du Roi, &c.
PREMIERE PARTIE,
CONTENANT
LES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE
AVEC FIGURES.
A PARIS,
Chez Ch. Ant. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Genie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.
M. DCC. LIV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Cependant, dans ses recherches sur le calcul de la distance à l'horizon selon la hauteur où l'on se trouve, quelle ne fut pas la surprise de Kangy de découvrir le truc étonnant d'Antoine Odier dans un livre datant d'il y a plus de trois siècles !

Dans le livre V de la *Géométrie pratique* de Joseph Sauveur (1653-1716) on trouve en effet un chapitre VIII intitulé *De la mesure des hauteurs des montagnes et des distances sur mer.*

Sauveur y montre comment mesurer la distance d'un bateau à la côte.

Il y utilise surtout le truc développé par Antoine Odier, consistant à exprimer cette distance et la hauteur d'une tour dans des unités différentes !

Voici le passage intéressant :

Si un vaisseau E s'éloigne d'un point B dans lequel il y a une tour BG ou quelques autres choses dont on connaît la hauteur par-dessus la surface de la mer, il faut voir avec une lunette d'approche le haut G de cette tour immédiatement au-dessus de la surface de la mer, qui est convexe, à cause de la rondeur de la Terre ; ensuite pour avoir la distance GC en toises, il faut connaître la hauteur BG en pieds, la réduire en pouces et tirer la racine carré du nombre de ces pouces, qu'il faut multiplier par 300. Le produit donnera la distance GC (ou la distance BC, qui est à peu près la même).

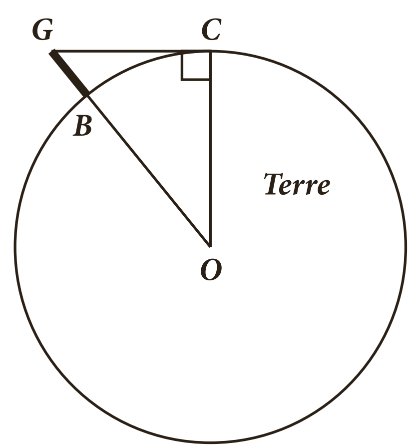
La relation liant la distance D (du haut de la tour à l'horizon ou inversement du bateau à la tour) et la hauteur H de la tour est donc, d'après Joseph Sauveur :

DD ≈ 90 000 H (D exprimée en toises et H en pouces).

Vérifions d'abord que cette formule est très proche de celle d'Odier.

Sachant qu'une toise vaut environ 2 mètres, qu'un pied vaut environ 1/3 mètre et un pouce 12 fois moins, on a H = 36h et D = 500d, avec les mesures d en km et h en mètres : $dd = (9 \times 36/25)h$; cela donne finalement $dd \approx 13h$, qui est plus juste que la formule d'Odier (lequel préférait le nombre 12, plus commode que 13, pour simplifier les calculs).

Évidemment Alice et Matt demandèrent à Kangy la justification mathématique de la formule d'Odier-Sauveur. La voici (pour les élèves de fin de collège).



Dans le triangle rectangle OCG, le théorème de Pythagore donne :

$$OC^2 + GC^2 = OG^2.$$

Et on a : OG = OB + BG.

Le rayon de la Terre (égal à OC ou OB) étant 6400 km et GC (très proche de BC) étant égal à d (en km), on a, en km :

$$6400^2 + d^2 = 6400^2 + 12800\ BG + BG^2$$

soit $$d^2 = (12800 + BG) \times BG.$$

Mais la longueur BG est très petite devant 12800 km, on a donc :

$$d^2 \approx 12800 \times BG.$$

Et, en considérant que la longueur BG est en mètres dans la formule :

$$d^2 \approx 12{,}8\ h.$$