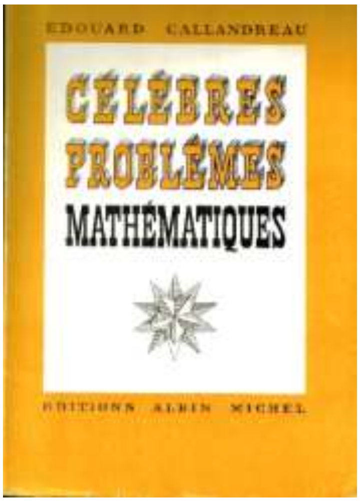
Pour toute base B, le carré et le double du nombre précédant la base ont des écritures inversées !

Pendant la dite « deuxième guerre mondiale », le professeur Édouard Callandreau (1886-1952) songeait, *sous les ombrages du noble jardin de Luxembourg,* au fantastique livre qu'il était en train d'écrire…



A une époque encore proche, et pourtant combien déjà lointaine, je me vois relisant sur le fronton de l'ancienne Orangerie devenue Musée, ces mots que je voudrais insuffler, comme une âme, à ce livre, et qui portent en eux une promesse aussi : « Ex praeterito, spes in futurum », que l'exemple du passé soit le gage et l'espoir de l'avenir !
Il est toujours bon, certes, de vivre en pensée, avec les grands savants des temps passés ; mais il est des heures où ce commerce est réconfortant, avant tout : il donne la force au cœur, et la joie à l'esprit ; il élève au-dessus du destin.
Le livre, paru en 1949, est une mine de plus d'une centaine de problèmes, célèbres ou non, qui ont fait réfléchir des générations de mathématiciens…

Le premier problème rappelé par Callandreau est celui de la *numération*.
Déjà Aristote (-384 à -322) avait remarqué que le nombre *quatre* pouvait remplacer le nombre *dix* comme base de numération, en effet :
un entier B supérieur à 1 étant choisi comme *base*, *tout entier se décompose (d'une seule façon) en somme de puissances de B (chacune étant prise au plus B−1 fois).*

Le premier résultat cité dans le livre est une propriété, dont la démonstration est de niveau « collège », plutôt inconnue et assez surprenante…
En base dix, par exemple, intéressons-nous au nombre précédent la base : 9.
Son double s'écrit 18. Et son carré 81.
Aviez-vous remarqué que les écritures de ces deux nombres étaient inversées ?

En effet, pour toute base *B*, le carré et le double du nombre précédant la base ont des écritures inversées !
Démonstration :
Le premier nombre vaut $2(B-1)$, ou $\mathbf{1}\times B + (\boldsymbol{B}\mathbf{-2})\times 1$ qui s'écrit, en base B, avec les chiffres **1** et $\boldsymbol{B}\mathbf{-2}$.
Et le deuxième vaut $(B-1)^2$, ou $(\boldsymbol{B}\mathbf{-2})\times B + \mathbf{1}\times 1$ qui s'écrit, en base B, avec les chiffres $\boldsymbol{B}\mathbf{-2}$ et **1**.

Le résultat, trivial pour $B=2$, est plus rigolo pour $B=16$, base utilisée pour écrire le code réclamé sur les « box » de nos appareils wifi :
Le double de 15, le nombre 30, s'écrit **1E** en base seize (16+14).
Et le carré de 15, le nombre 225, s'écrit bien **E1** en base seize (14×16+1=224+1).