XII - Problème d'un père et de ses trois fils

Soit un père de famille qui laisse en mourant en héritage à ses trois fils XXX bonbonnes dont X sont pleines d'huile, X à moitié pleines et les X dernières vides.
Partage, qui le peut, les bonbonnes et l'huile entre les trois fils de telle sorte que le partage soit équitable en nombre de bonbonnes et en quantité d'huile.

Solution d'Alcuin
Comme il y a trois fils et 30 bonbonnes, chacun doit recevoir 10 bonbonnes. Comme 10 bonbonnes sont pleines, 10 à moitié pleines et 10 vides, en les divisant en trois, cela fait pour chaque fils l'équivalent de 10 bonbonnes à moitié pleines. Le premier fils percevra 10 bonbonnes à moitié pleines, le deuxième en recevra 5 pleines et 5 vides, tout comme le troisième.

Commentaire
Ce problème ayant été repris au cours des siècles est devenu un véritable classique des récréations mathématiques, mais l'huile a très vite été changée en vin dans les versions plus récentes.

Voici la variante de **Bachet de Méziriac** en 1612 [5] :

Trois compagnons ont à se partager 21 tonneaux de vin, dont 7 pleins, 7 vides et 7 à moitié pleins.
Que faire pour que tous trois aient un égal nombre de tonneaux et une égale quantité de vin (sans transvasement) ?

Et voici une variante plus récente et plus difficile, proposée par P. Tougne dans *Pour la science* en décembre 1999 :

Un vigneron possède 45 tonneaux de vin dont 9 sont pleins, 9 sont emplis aux trois quarts, 9 emplis à moitié, 9 emplis au quart et 9 vides. Il désire les donner en héritage à ses cinq enfants de façon équitable (autant de vin et autant de tonneaux) de façon que chacun reçoive au moins un tonneau de chaque sorte et qu'il n'y en ait pas deux qui reçoivent le même nombre de chaque sorte de tonneaux. Pour aider ce vigneron à faire ce partage, trouver les trois répartitions fondamentalement différentes (c'est-à-dire aux permutations près entre ses enfants) possibles !

Solution

Donnons la solution du problème généralisé, que nous appelons *Alcuin*(n) : le partage (équitable en vin et en tonneaux) de $3n$ tonneaux, n pleins, n demi-pleins et n vides, entre 3 compagnons.

Soit a, b, c les nombres de tonneaux pleins reçus par chacun.

Le premier compagnon doit recevoir l'équivalent en vin de $n/2$ tonneaux ; il doit donc recevoir x tonneaux demi-pleins tels que $a + x/2 = n/2$, soit $x = n - 2a$.

On doit avoir $0 \leqslant n - 2a$, soit $a \leqslant n/2$. Et il doit recevoir n tonneaux, égal à $a + (n - 2a) + a$; a est donc aussi le nombre de tonneaux vides.

Le premier compagnon reçoit donc a pleins, a vides et $n - 2a$ demi-pleins.

Le deuxième reçoit, de même, b pleins, b vides et $n - 2b$ demi-pleins.

Et le troisième reçoit c pleins, c vides et $n - 2c$ demi-pleins.

On voit que les solutions sont données par les triplets (a, b, c) tels que $a + b + c = n$, les nombres a, b et c étant compris entre 0 et $n/2$.

Pour le problème Alcuin(10), il y a 5 solutions (Alcuin ne donnant que la première) :

$10 = 5 + 5 + 0$,

$10 = 5 + 4 + 1$,

$10 = 5 + 3 + 2$,

$10 = 4 + 4 + 2$,

$10 = 4 + 3 + 3$.

Et pour le problème de Méziriac, Alcuin(7), il y a 2 solutions :

$7 = 2 + 2 + 3$ et $7 = 1 + 3 + 3$.

La suite d'Alcuin

Le problème Alcuin(n) est de trouver le nombre de triplets d'entiers (a, b, c) tels que $a + b + c = n$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant n/2$.

À la fin du XX^e^ siècle, David Singmaster s'est aperçu que le problème Alcuin(n) était très semblable au suivant : trouver le nombre de triangles à côtés entiers (a, b, c), de périmètre $a + b + c = n$.
En effet, ces triplets-là vérifient $0 < a \leqslant b \leqslant c < a + b$
c'est-à-dire $0 < a \leqslant b \leqslant c < n/2$
(attention, il y a deux inégalités qui sont, ici, strictes).
Appelons ce problème Triangle(n).

Remarquons que, à toute solution (a, b, c) de Alcuin(n) correspond une solution de Triangle($n+3$) : ($a + 1$, $b + 1$, $c + 1$) ; en ajoutant 1 à chaque terme, on assure en effet qu'aucun ne peut être nul, et donc non plus égal à $n/2$.
Inversement, à toute solution (a, b, c) de Triangle($n+3$) correspond une solution de Alcuin(n) : ($a - 1$, $b - 1$, $c - 1$).
Les solutions de Alcuin(n) sont donc exactement aussi nombreuses que les solutions de Triangle($n+3$) !

Dominic Olivastro a proposé, en 1993, que le nom de *suite d'Alcuin* soit donné à la suite des nombres successifs A(n) de solutions de Alcuin(n) :

n	0	1	2	3	4	5	6
A(n)	1	0	1	1	2	1	3

n	7	8	9	10	11	12	13
A(n)	2	4	3	5	4	7	5

On voit sur ce tableau que le problème Alcuin(10) a bien 5 solutions ; autant que le nombre de triangles de périmètre 13 à côtés entiers, dont les solutions sont (1 + 6 + 6), (2 + 5 + 6), (3 + 4 + 6), (3 + 5 + 5), (4 + 4 + 5).
Signalons trois propriétés de la suite d'Alcuin :

- A(n) vaut l'arrondi entier de $n^2/48$ pour n pair, et celui de $(n+3)^2/48$ pour n impair ;
- le nombre de triangles de périmètre n à côtés entiers est aussi le nombre de triangles de périmètre $n + 6$ à côtés entiers différents ;
- la suite d'Alcuin est aussi la suite des coefficients des puissances de x de la série de MacLaurin de $1/(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$.