

**André Deledicq et Mickaël Launay,**

**Editions Plon, avril 2021.**

L'article *Schéma* montre comment l'image d'un cube peut s'interpréter d'au moins 10 façons différentes.

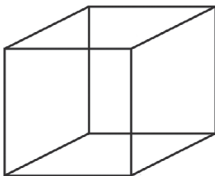
Qu'un même schéma, une même théorie ou un même modèle, puisse s'appliquer et être efficace dans de multiples situations très différentes, on sait bien que c'est l'une des idées-forces des mathématiques.

Pareillement, un même ensemble peut donner lieu à plusieurs types de schémas d'organisation, modélisant des structures différentes. C'est le cas des 32 kangourous des affiches 2021 et 2022 du *Kangourou des mathématiques*, comme cela est expliqué à l'adresse : <http://www.mathkang.org/concours/affiche2022.html>

## Schéma

Ce jour-là, les dix sages du CMM (Conseil de la multiplicité des mathématiques) s'étaient réunis pour répondre à la question : qu'est-ce que c'est ?

Face à eux se trouvait un monolithe parallélépipédique

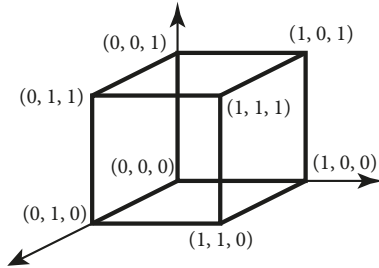


[qui aurait pu être celui que rencontrent les protagonistes du film 2001 *Odyssée de l'espace*, au début de leur histoire].

Que représente ce monolithe, quelle est cette figure ?

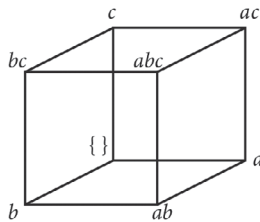
- « Un pavé, dit le premier, vieux nostalgique de Mai 68.
- Un cube, dit le second, qui avait l'âme simple et des idées franches, qu'il savait exprimer avec concision.
- Une représentation des huit triplets booléens », dit le troisième, qui souhaitait paraître plus savant qu'il ne l'était. George Boole, logicien anglais du XIX<sup>e</sup> siècle, avait introduit le calcul « booléen », c'est-à-dire un calcul (dit « logique ») avec des 0 et des 1 (voir Modulo).

Dans ce contexte, la figure représente naturellement l'ensemble des 8 triplets formés des éléments 0 ou 1, c'est-à-dire :  $(0,0,0)$  ;  $(0,0,1)$  ;  $(0,1,0)$  ;  $(0,1,1)$  ;  $(1,0,0)$  ;  $(1,0,1)$  ;  $(1,1,0)$  ;  $(1,1,1)$ .



« C'est donc aussi, dit le quatrième, qui était plus sémiologue que géomètre, l'ensemble des réponses possibles à trois alternatives ; il suffit pour cela d'interpréter 0 ou 1 comme des réponses OUI ou NON à trois questions ambivalentes. Et de représenter, donc, les huit catégories d'une population définie par trois caractères binaires : je peux être féminin ou masculin, jeune ou vieux, petit ou grand.

— C'est plutôt le « treillis des parties d'un ensemble à trois éléments », dit le cinquième. Il expliqua qu'un ensemble  $\{a, b, c\}$  avait 8 parties :  $\{a\}$  ;  $\{b\}$  ;  $\{c\}$  ;  $\{ab\}$  ;  $\{ac\}$  ;  $\{bc\}$  ;  $\{abc\}$  ; et la partie « vide »  $\{\}$ .

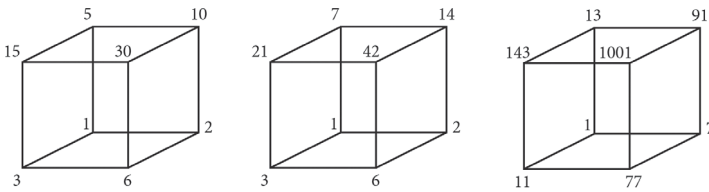


Ces parties sont liées par une relation d'ordre. Chaque trait signifie que la partie représentée par son origine est

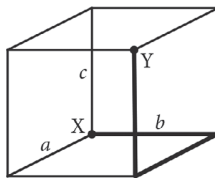
incluse dans la partie représentée par son extrémité : le trait reliant  $ab$  à  $abc$  signifie que  $\{ab\}$  est incluse dans  $\{abc\}$ . Le schéma n'est que le graphe de cette relation d'ordre.

Le troisième fit remarquer que cette interprétation coïncidait avec celle des triplets booléens, puisque la donnée d'une partie est équivalente au triplet de réponses aux questions successives :  $a$  appartient-il à cette partie ?  $b$  appartient-il à cette partie ?  $c$  appartient-il à cette partie ?

« Puisque vous avez prononcé le mot *treillis*, dit le sixième, c'est, pareillement, le treillis des diviseurs de 30. C'est en effet le graphe de la relation "divise" dans l'ensemble des diviseurs de tout nombre égal au produit de trois nombres premiers, comme 30, 42 ou 1 001. Car, de la même façon que  $30 = 2 \times 3 \times 5$ , on a  $42 = 2 \times 3 \times 7$  et  $1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$ . »



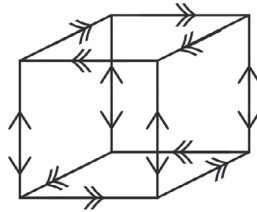
« C'est la schématisation d'un problème d'affectation », dit le septième, qui était contremaître dans une usine de conditionnement.



« J'ai trois machines ( $a, b, c$ ) et trois ouvriers. À chaque affectation de ces ouvriers à chacune de ces machines, je peux associer un chemin allant du sommet X au sommet Y.

Pour cela, j'associe chacune de mes trois machines à une des trois directions de l'espace. Ainsi, par exemple, le chemin marqué sur la figure correspond à l'affectation : le premier ouvrier sur  $b$ , le deuxième sur  $a$  et le troisième sur  $c$ . Il existe six chemins, donc six affectations différentes possibles. »

Chacun s'étonnait de cette incursion dans le monde industriel, lorsque le huitième intervenant s'écria : « C'est la description d'une structure de parenté dans la tribu Aranda ! » L'intervenant se référait à un article de l'ethnologue mathématicien Philippe Courrège, élève de Claude Lévi-Strauss et adepte du structuralisme.

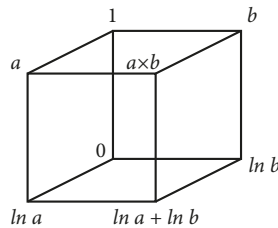


Il expliqua que, dans la tribu Aranda, il existait huit classes sociales et que les règles suivantes devaient être respectées :

- Tout homme  $h$  doit obligatoirement épouser une femme de la classe  $M(h)$ ,  $M$  étant la relation représentée par  $>$ .
- Si la mère appartient à la classe  $x$ , l'enfant appartient à la classe  $m(x)$ ,  $m$  étant la relation représentée par  $>>$ .

Si on interprète, par exemple, les quatre classes du haut comme « supérieures » et celles du bas comme « inférieures », alors chaque homme doit épouser une femme d'une catégorie différente de la sienne et les fils sont de la même catégorie que leur mère. Une telle structure de parenté assure la mixité sociale, en obligeant chaque clan familial à parcourir rapidement l'ensemble des classes.

« Je ne sais pas si j'ai tout compris, dit le neuvième, mais pour moi cette figure n'est qu'un diagramme de transport de structure opératoire associative. »



Comme tout le monde restait estomaqué, ce dernier expliqua comment la fonction « logarithme » transportait l'opération « multiplication des nombres » sur « l'addition des nombres positifs ».

Quand le dixième s'exclama « Mais alors, ce n'est que le simple schéma d'une conjugaison », les sages comprirent que cela pouvait durer encore longtemps et qu'il ne leur restait qu'à s'émerveiller de la multiplicité de ces interprétations.

Le lecteur, lui, aura compris qu'une même figure, comme un même concept mathématique, pouvait représenter de multiples situations différentes, qu'ils soient extraits de la vie plus ou moins courante ou de la mathématique elle-même ou d'autres disciplines de notre monde complexe.

Et il aura senti, comme un sentiment blotti au plus profond de sa pensée, que c'était peut-être un peu cela qui rendait les mathématiques aussi efficaces et, en même temps, aussi belles et aussi fascinantes.