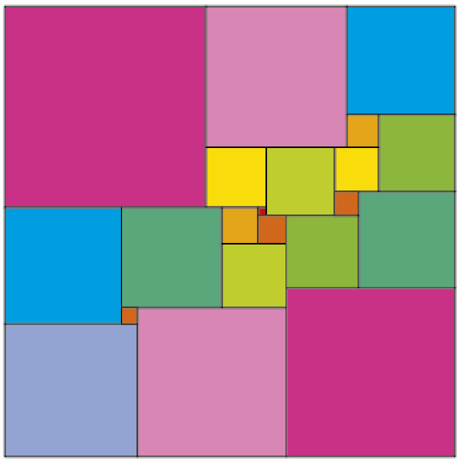
Les carrés de carrés

En 1936 quatre étudiants du *Trinity College* de *Cambridge* s'étaient attaqués, sous le nom de Blanche Descartes, au problème des carrés de carrés.
Il s'agissait de remplir un carré avec des carrés tous différents, chacun de côté entier.
Leur histoire est racontée dans l'article *Quadrature du carré* du *Dictionnaire amoureux des Mathématiques* reproduit page suivante.

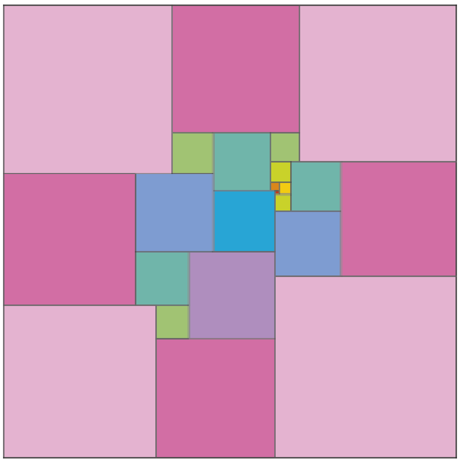
Voici le carré de carrés ayant le moins de carrés (exactement 21).



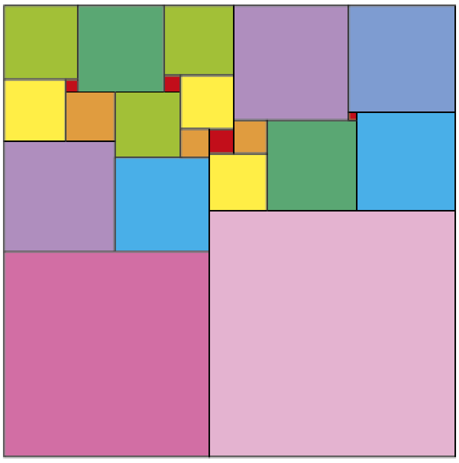
Dans ce carré, de côté 112, le plus petit carré a pour côté 2 et le plus grand a pour côté 50.

Dans ce dessin, les côtés des carrés sont successivement de haut en bas, et de gauche à droite (s'ils sont sur une même horizontale) :
50, 35, 27, 8, 19,15 17, 11, 6, 24,
29, 25, 9, 2, 7, 18, 16, 42, 4, 37, 33.
Et on a colorié les carrés par ordre de grandeur décroissant en prenant une nouvelle couleur dès que nécessaire pour ne pas avoir deux carrés qui se touchent de la même couleur.

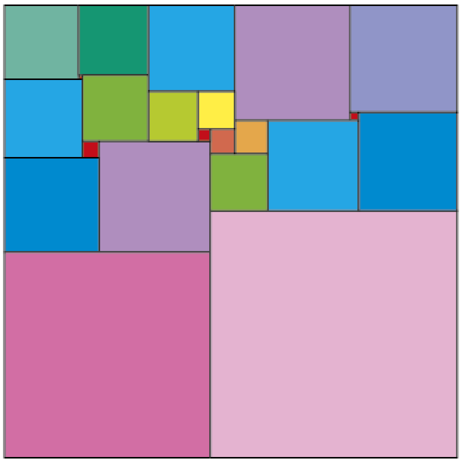
Mais curieusement, le puzzle constitué du moins de carrés n'est pas celui qui a le plus petit côté. En effet, il existe trois carrés de carrés (tous différents et chacun de côté entier) ayant 110 pour plus petit côté possible :
(1) 23 carrés, plus petit côté = 1, plus grand côté = 44.
(2) 22 carrés, plus petit côté = 2, plus grand côté = 60.
(3) 22 carrés, plus petit côté = 1, plus grand côté = 60.



(1)



(2)



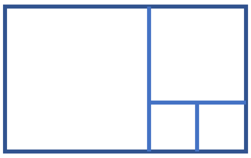
(3)

L'article *Quadrature du carré*, pages 573 à 578 du *Dictionnaire amoureux des Mathématiques* (André Deledicq & Mickaël Launay, Plon, avril 2021) *:*

La première histoire à laquelle je pense lorsqu'on me parle de carrés est la roborative aventure de madame Brooks et de son fils Leonard. Etudiant au *Trinity College* à Cambridge, il avait un soir invité ses amis William Tutte, Cedric Smith et Arthur Stone à résoudre ensemble un problème qui les passionnait :

Il est facile de remplir un rectangle avec des carrés.

Ci-dessous, un rectangle 3×5 est ainsi rempli par 4 carrés, 3×3, 2×2, 1×1 et 1×1 :



Cependant le problème devient difficile si on impose que les carrés soient tous différents. Car les carrés deviennent vite grands et on se trouve obligé d'utiliser plusieurs carrés plus petits pour remplir les trous qui apparaissent inéluctablement.

Le problème des quatre étudiants, qui travaillaient avec des carrés en papier découpés était précisément le suivant : *Existe-t-il un découpage de rectangle en carrés tous différents entre eux, à côtés entiers ?*

Ils étaient restés tard dans la nuit. Épuisés mais heureux, ils avaient finalement trouvé et noté une solution, puis étaient partis se coucher :

La mère de Leonard, intriguée, lui ayant demandé sur quoi ils avaient travaillé aussi tard, il lui avait donné l'ensemble des carrés constituant leur solution, en lui proposant de s'amuser à retrouver l'assemblage en rectangle.

Et le matin, sa mère décida de s'attaquer au puzzle que Leonard lui avait laissé. Elle crut avoir retrouvé la solution des quatre amis et la laissa sur la table du salon.

L'après-midi, les étudiants revinrent, tout excités de leur découverte nocturne. Ils regardèrent le découpage qu'ils croyaient avoir réalisé la veille.

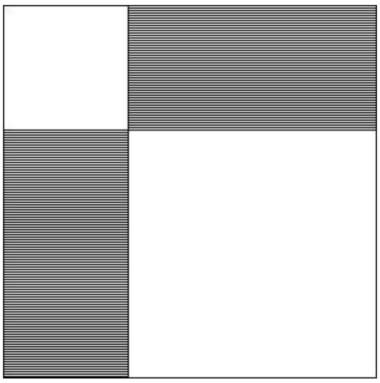
Quelle ne fut pas leur surprise lorsque l'un d'entre eux s'aperçut que ce n'était pas le même que celui qu'ils avaient trouvé hier !

- Dans notre rectangle, leur dit-il, le bord haut du carré de 14 se situe exactement au même niveau horizontal que le bord haut du carré de 33. Et dans le rectangle de madame Brooks, en plus, ces deux carrés sont côte à côte. Les quatre amis se regardèrent et allèrent embrasser madame Brooks et entamèrent une farandole endiablée à la mesure de la découverte.

Car ils comprenaient que la solution de madame Brooks allait débloquer, pour eux, un problème plus difficile posé à la fin des années 1930 : *la quadrature du carré*, problème demandant s'il est possible *de découper un carré en plusieurs carrés de tailles toutes différentes, à côtés entiers*.

Son nom fait référence avec humour à la quadrature du cercle, mais dont l'ancienneté et l'intérêt théorique ne sont pas comparables. Le problème commençait cependant à acquérir une petite renommée dans la communauté mathématique sous le nom de conjecture de Louzine, du nom du mathématicien russe qui avait conjecturé l'inexistence de tels carrés.

Ce qu'avait en effet déjà compris les quatre compères, c'est que, s'ils connaissaient déjà deux façons différentes de découper un même rectangle, alors ils sauraient construire un carré à partir du schéma suivant :



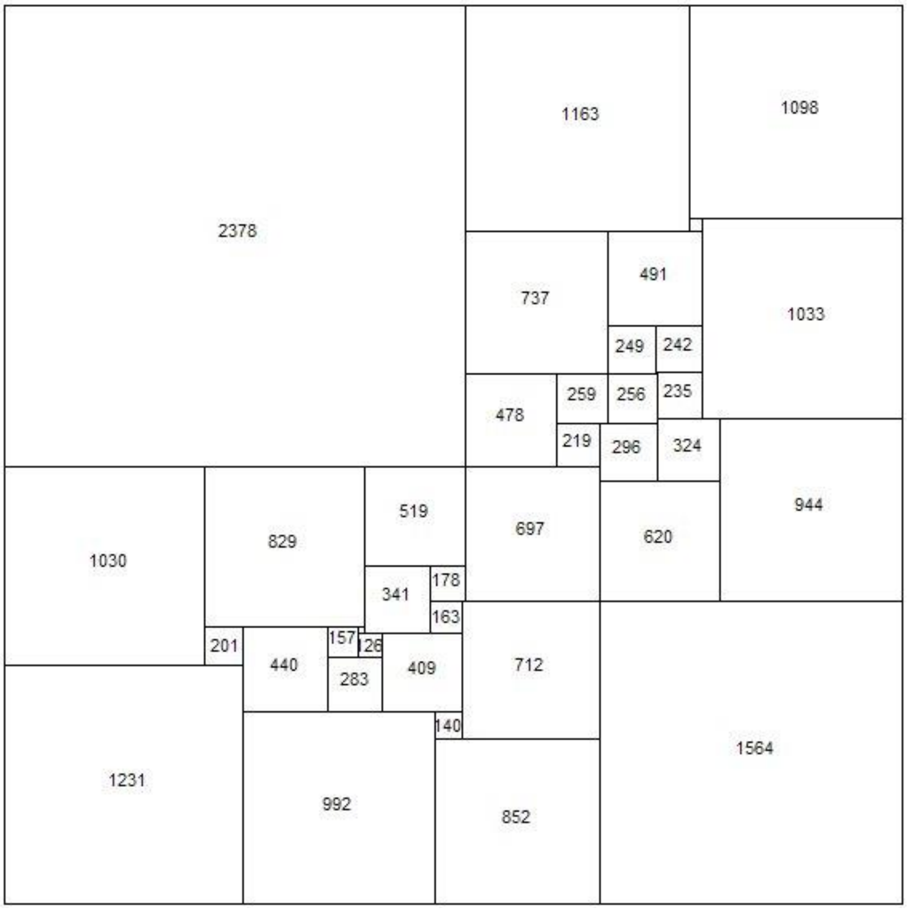
Placez vos deux rectangles découpés dans les emplacements grisés, complétez avec les deux carrés blancs et vous avez résolu la conjecture de Louzine.

Malheureusement, ceci ne résout pas vraiment le problème, car ces deux rectangles sont composés des mêmes carrés ; Mais c'est en étudiant ces deux rectangles que les quatre étudiants vont comprendre le mécanisme clef qui permet de passer d'un découpage de rectangle à un autre.

Et peu à peu, à force de travail et de patience, ils vont parvenir à réduire le nombre de carrés communs.

Jusqu'au jour où ils découvrirent deux rectangles qui n'avaient plus qu'un seul carré commun : le rectangle qui se situe en haut et à droite du carré d'aire 697 sur la figure ci-dessous, et le rectangle qui se situe en bas et à gauche de ce même carré.

Car c'est en superposant ces carrés communs qu'ils obtinrent la toute première *quadrature du carré* :



Cette belle histoire nous est connue par William Tutte, l'un des étudiants du groupe de quatre qui continuèrent à collaborer, en prenant un pseudonyme aux consonances françaises : *Blanche Descartes*, mathématicienne imaginaire sous le nom de laquelle ils publièrent leurs premiers résultats partiels. Le pseudonyme BLAnChe avait été composé à partir de leurs quatre initiales : B pour Bill (surnom de William), L pour Leonard, A pour Arthur et C pour Cedric.

Après la résolution de la « quadrature du carré », Blanche Descartes continuera de publier non seulement de véritables théorèmes, mais aussi de la poésie et des textes d'humour mathématique. Trois d'entre eux, Brooks, Stone et Smith, finirent par publier leurs travaux sous leur vrai nom en 1940. Mais William Tutte, qui fut sans doute le plus prolifique des quatre, prolongera le canular et Blanche Descartes continuera ainsi à publier occasionnellement quelques résultats originaux pendant près de vingt ans. Génial précurseur de la théorie des graphes Tutte avait aussi réussi, pendant la deuxième guerre mondiale, à décrypter les messages du quartier général d'Hitler codés par la machine dite de Lorenz SZ40/42 (à l'instar d'Alan Turing pour la machine Enigma, utilisée aussi par l'armée allemande).