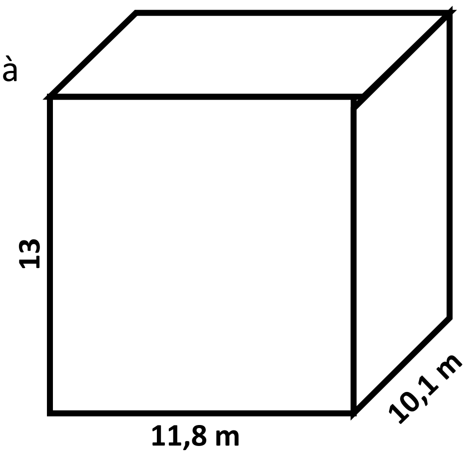
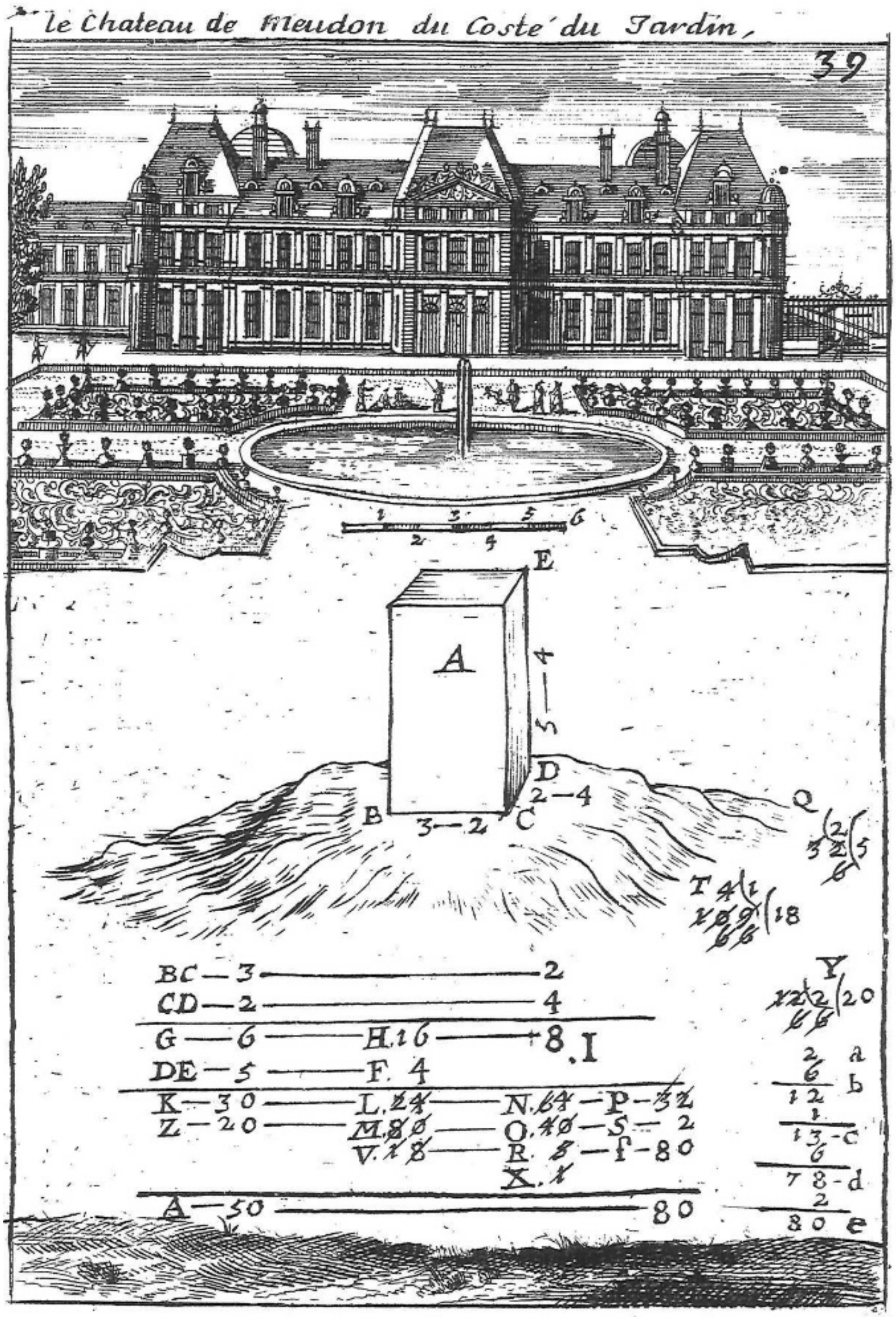
De l’incroyable difficulté des calculs avec les anciennes mesures
André Deledicq, septembre 2020

Les hommes et leurs activités étant ce qu’ils sont, leurs échanges, et les unités susceptibles de les mesurer, sont longtemps restés localisés à une région ou, même, à une ville.
Par exemple, au XVI^{e} siècle, 12 deniers de Bruges en valaient 14 d’Anvers, la livre de Paris ne valait pas exactement celle de Rouen ou celle de Lyon, …
Qu’elles soient monétaires, de masse, de longueur, de surface ou de volume, les unités semblaient fantaisistes et cela rendait le commerce difficile.
Sans compter que, difficulté supplémentaire, les unités de surface et de volume n’étaient pas liées aux unités de longueur, comme elles le sont aujourd’hui (par exemple le mètre, le mètre carré, le mètre cube). On pouvait ainsi mesurer une longueur en toises, une surface en arpents et un volume en setiers !
Pire encore, les unités variaient en fonction des produits que l’on mesurait ! Par exemple, les liquides pouvaient être mesurés en pintes, les grains en boisseaux, le bois en stères et les blocs de pierre en pieds-cubes.
On sait que, sur notre continent, le système métrique révolutionnaire permit la normalisation universelle des unités. Il est facile d’en comprendre l’énorme avantage. Ce qui l’est moins c’est de saisir qu’il amène un « plus » efficace et fondamental par l’utilisation systématique des puissances de 10 : dix, cent, mille, et leur suite…
Si vous n’en êtes pas encore conscient, ou si vous êtes Anglo-saxon, un petit calcul va vous en convaincre…



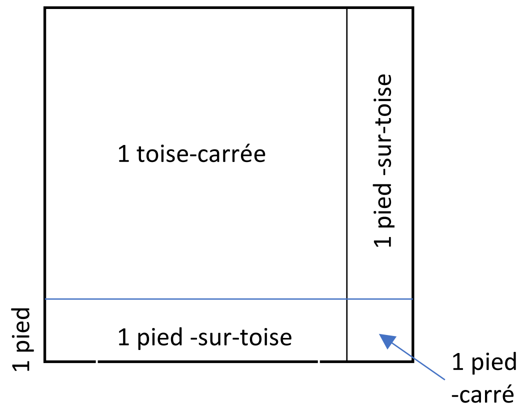
Le lieu le plus sacré de l’Islam, la Kaaba, est un bâtiment à peu de chose près parallélépipédique dont la hauteur serait 13 mètres et la base 10,1 mètres sur 11,8.
Sous cette forme, son volume n’est pas difficile à calculer : il suffit d’effectuer deux multiplications : (10,1 x 11,8) x 13 = 119,8x13 = 1549,34. La Kaaba mesure donc environ 1550 mètres-cubes.
Que devient le calcul de ce volume avec les unités du XVIII^{e} siècle ?
À Paris, au temps où 12 pouces valaient un pied-du-roi, 6 pieds-du-roi valaient une toise et une toise valait 1,95 de nos mètres. Avec ces unités, les dimensions de la Kaaba sont : 5 toises 1 pied 1 pouce x 6 toises 4 pouces x 6 toises 4 pieds.
Sauriez-vous donner le volume de la Kaaba en unités de Paris du XVIII^{e} ?
Autrement dit, seriez-vous capable de dire combien ce volume représente de toises-cubes, de pieds-cubes et de pouces-cubes ?
Évidemment, il faut faire le calcul sans tricher, c’est-à-dire sans passer par l’intermédiaire des mesures décimales.
Vous constaterez vite que le calcul est très difficile.

On peut aussi s’en rendre compte en consultant le magnifique ouvrage en 4 tomes d’Alain Manesson-Mallet (*La géométrie pratique*, édité en MDCCII avec privilège du roi). Magnifique, car on y trouve 491 planches gravées, demi ou pleine page, représentant, au milieu de calculs et de dessins géométriques, de belles gravures de villes, jardins et monuments, payées par leurs « propriétaires ». C’était un moyen, alors moderne, permettant à l’éditeur de financer la gravure des pages de figures de son livre de géométrie, par une sorte d’ancestrale publicité.



Le tome 4 traite de *La Stéréométrie, ou le Toisé de toutes sortes de corps, de telle capacité et figure qu’ils puissent être*.
Les exemples qu’on y trouve sont moins compliqués que notre problème du volume de la Kaaba, les mesures n’étant données qu’avec deux unités (toises et pieds) au lieu de trois (avec les pouces en plus) ; cependant, comme on le verra plus loin, le calcul est suffisamment complexe pour nécessiter deux pages d’explication.
L’exemple développé (page 22 et page 39 du livre) décrit le calcul du volume d’un parallélépipède mesurant 5 toises 4 pieds de hauteur, pour une base de 3 toises 2 pieds de longueur et 2 toises 4 pieds de largeur.
Le résumé du calcul de Manesson-Mallet figure en bas de la planche reproduite ci-dessus, sous le *Château de Meudon, du côté du jardin*. Nous donnons plus loin la reconstitution détaillée de ce calcul.
Le tome 3 traite de *La Planimétrie ou la mesure des Superficies.*

Manesson-Mallet y explique, en particulier, pourquoi la multiplication d'une longueur par une largeur, exprimées en toises et pieds, donnent d'une part des toises-carrées, d'autre part des pieds-carrés, mais aussi ce qu'il appelle des pieds-sur toises, qu'il faut transformer en toises-carrées et pieds-carrés. Pour les volumes, cela donne des toises-cubes, des pieds-cubes et aussi des pieds- sur-toises-carrées et des pieds-carrés-sur-toises…



Explication du résumé du calcul de Manesson-Mallet
(les lettres font référence à celles de la planche reproduite ci-dessus) :
En multipliant 3 toises+2 pieds (BC) par 2 toises+4 pieds (CD), on obtient
6 toises-carrées + (12+4) toises×pieds + 8 pieds-carrés (G, H, I).
Il s'agit ici de développer le produit (3t+2p)x(2t+4p) pour obtenir :
$2x3t^2 +3x4tp + 2x2tp +2x4p^2$.
Et en multipliant cette superficie par la hauteur 5 toises+4 pieds, (DE, F), on obtient :
30 toises-cubes **(K)**
+ 24 toises-carrées×pieds + 64 toises×pieds-carrés (L et N)
+ 80 toises-carrées×pieds + 40 toises×pieds-carrés (M et O)
+ 32 pieds-cubes (P)
Sachant que 1toise vaut 6pieds, 1 toise-cube vaut 6 toisescarrées×pieds**, dont chacun vaut** 6 toises×pieds-carrés, dont chacun vaut 6 pieds-cubes
Manesson-Mallet fait la division de 32 par 6 (calcul Q : 32=5x6 + 2) et remplace donc 32 pieds-cubes par
5 toises×pieds-carrés + 2 pieds-cubes (R et S).
Il y a alors (64+40+5), soit 109 toises×pieds-carrés et la division de 109 par 6 (calcul T : 109=6×18 + 1) montre que cette mesure vaut aussi :
18 toises-carrées×pieds + 1 toise×pied-carré. (V et X)
Il y a maintenant (24+80+18), soit 122 toises-carrées×pieds, et la division de 122 par 6 (calcul Y ; 122=6×20 + 2) montre que cette mesure vaut aussi :
20 toises-cubes + 2 toises-carrées×pieds. (Z et a)
On trouve finalement 30+20, soit 50 toises-cubes (A)
+ 2 toises-carrées×pieds +1 toise×pied-carré + 2 pieds-cubes.
Or 2 toises-carrées×pieds valent 12 toises×pieds-carrés (b)
Qu'il faut additionner à 1 toise×pied-carré. (c)
Cela fait 13 toises×pieds-carrés, ou encore 6×13, soit 78 pieds-cubes (d).
Avec les 2 derniers pieds-cubes, cela en fait 80 pieds-cubes. (e)
Le volume cherché vaut donc finalement 50 toises-cubes et 80 pieds-cubes (A)

Nous donnons ci-après, pour information, les deux pages d'explications de Manesson-Mallet. Elles valent leur pesant de complications !

QUATRIE'ME PROPOSITION.

DE la multiplication des toises & pieds, par toises & pieds, & de leur produit multiplié aussi par toises & pieds.

Exemple. On veut multiplier B C 3. toises 2. pieds, par C D 2. toises 4. pieds, & multiplier leur produit par D E 5. toises 4. pieds.

BC —— 3 toises. ———————— 2 pieds.
CD —— 2 toises. ———————— 4 pieds.

G —— 6 toi. qu. — H 16 pi. sur toi. – I 8 pieds qu.
DE —— 5 toi. —— F 4 pieds.

K —— 30 ——— L ~~24~~ ——— N ~~64~~ — P ~~32~~
Z —— 20 ——— M ~~80~~ ——— O ~~40~~ — S 2
V ~~18~~ ——— R ~~8~~ — e 78
pieds sol. sur toi. qu. X ~~1~~
pied sol. cour. sur toi.

A —— 50 toises cubes. ———————— 80 pieds cubes.

Q
2
~~32~~(5
~~6~~

T
~~4~~1
~~108~~(18
~~66~~

Y
2
~~122~~(20
~~66~~

2 a
6
12 b
1
13 c
6
78 d

Pratique de cet Exemple.

1°. Multipliez les 3. toises de BC, par les 2. toises de CD, au-dessous de la ligne en G, qui produiront 6. toises quarrées. Ensuite multipliez en croix les 3. toises de BC, par les 4. pieds de CD, qui produiront 12. pieds sur toises, qu'il faut retenir dans sa memoire: puis multipliez les 2. toises de C D, par les 2. pieds de BC, qui produiront 4. pieds sur toises, qui étant ajoûtez avec les 12. qu'on a retenu, donneront 16. pieds sur toises, qu'on chiffrera en H. Multipliez les 2. pieds de BC, par les 4. pieds de CD, en I, qui produiront 8. pieds quarrez: & vous aurez une superficie de 6. toises quarrées, 16. pieds sur toises & 8. pieds quarrez.

2°. Multipliez les 6. toises quarrées de G, par les 5. toises de DE, qui produiront en K 30. toises cubes.

3°. Multipliez en croix les 6. toises quarrées de G, par les 4. pieds de F, qui produiront en L 24. pieds solides sur toises quarrées. Puis multipliez les 5. toises de D E, par les 16. pieds sur toises de H, qui produiront en M 80. pieds solides sur toises quarrées.

4° Multipliez les 4. pieds de F, par les 16. pieds de H, qui produiront en N 64. pieds solides courant sur toises. Puis multipliez les 5. toises de D E, par les 8. pieds quarrez de I, qui produiront en O, 40. pieds solides courant sur toises. Enfin multipliez les 4. pieds de F, par les 8. pieds quarrez de I, qui produiront en P 32. pieds cubes.

5° Pour sçavoir ce que les 32. pieds cubes font de pieds solides courant sur toises, divisez-les à part en Q, par 6. (nombre des pieds cubes que vaut 1. pied solide courant sur toise,) le quotient Q donnera 5. pieds solides courant sur toises, qu'on chiffrera à la régle dans leur colonne en R. Et comme il est resté 2. pieds cubes à la division Q, on les chiffrera dans leur colonne en S, ayant eu soin de trancher à la régle les chiffres de P, puisqu'on les a reduit en d'autres especes.

6° Pour sçavoir ce que les pieds solides courant sur toises marquez à régle des lettres N, O, R, font de pieds solides sur toises quarrées, on les additionnera à part en T, pour diviser leur somme totale 109. pieds solides courant sur toises, par 6. (nombre des pieds solides courant sur toises, que vaut 1. pied solide sur toise quarrée,) le quotient T donnera 18. pieds solides sur toises quarrées, qu'on chiffrera à la régle en V dans leurs colonnes : & comme il est resté 1. pied solide courant sur toise à la division T, on le chiffrera à la régle en X dans sa colonne : ayant eu soin de trancher à la régle les chiffres de N, O, R, puisqu'on les a reduit en d'autres especes.

7° Pour sçavoir ce que les pieds solides sur toises quarrées, marquez à la régle des lettres L, M, N, font de toises cubes, on les additionnera à part en Y, pour diviser leur somme totale 122. pieds solides sur toises quarrées, par 6. (nombre des pieds solides sur toises quarrées, que vaut 1. toise cube,) le quotient Y donnera 20. toises cubes, qu'on chiffrera à la régle dans leurs colonnes en Z ;

ayant eu soin de trancher à la régle (dans la page 22.) les chiffres de L, M, V, puisqu'on les a reduit en d'autres especes.

8° Comme il est resté à la division Y 2. pieds solides sur toises quarrées, on les reduira d'abord en pieds solides courant sur toises, en les multipliant à part en a par 6. (nombre des pieds solides courant sur toises, que vaut 1. pied solide sur toise quarrée,) le produit donnera 12. pieds solides courant sur toises, *exemple* b, ausquels étant ajoûté celui de la régle marqué X, on aura 13. pieds solides courant sur toises, *exemple* c, qu'on reduira en pieds cubes, les multipliant par 6. (nombre des pieds cubes, que vaut 1. pied solide courant sur toise,) le produit marqué d donnera 78. pieds cubes, qu'on chiffrera à la régle dans leurs colonnes en e : ayant eu soin de trancher à la régle le chiffre de X, puisqu'on l'a reduit en une autre espece.

9° Tracez une longue ligne au-dessous des sommes de la régle. Additionnez les pieds & les toises cubes, & vous aurez en A 50. toises cubes, & 80. pieds cubes pour l'exemple proposé.

Quelle serait aujourd'hui la meilleure méthode pour mener le calcul ?
Une bonne méthode consisterait à convertir d'abord toutes les mesures en pieds, puis calculer le volume en pieds-cubes et enfin, par une division entière, revenir aux toises-cubes et aux pieds-cubes restants.
Cependant, il est peut-être plus simple de faire appel à une méthode algébrique.
Le produit à effectuer est le suivant :

$V = (3t+2p)x(2t+4p)x(5t+4p)$, avec $t=6p$.

$(3t+2p)x(2t+4p) = 6t^2 + (3x4 + 2x2)tp + 8p^2$

$V = (6t^2 + 16tp + 8p^2)x(5t+4p)$

$V = 30t^3 + (6x4+16x5)t^2p + (16x4+8x5)tp^2 + 8x4p^3$

$V = 30t^3 + 104x6^2p^3 + 104x6p^3 + 32p^3$

$V = 30t^3 + 3744p^3 + 624p^3 + 32p^3$

$V= 30t^3 + 4400p^3 = 30t^3 +(20x216 + 80)\ p^3$, car $6^3=216$ et $216\ p^3=t^3$.

$V = 30t^3 + 20\ t^3 + 80p^3 = 50t^3 + 80p^3$

OUF !

En conclusion, il me semble que l'on pourrait montrer ces calculs à des élèves de troisième ou de lycées, en les leur commentant en détails.
Nous pouvons alors espérer les avoir convaincus du fantastique progrès apporté par le système métrique associé au système décimal…

Et pourquoi ne pas leur proposer un exercice plus simple sur les aires ?
Calculer la superficie d'une étagère mesurant 2 pieds 5 pouces de longueur et 1 pied 2 pouces de largeur.
Ils pourront ainsi constater les avantages de la méthode algébrique qui, par ailleurs, leur fait bien manipuler la distributivité.

DE la multiplication des pieds & pouces, par pieds & pouces, & de leur produit multiplié par pieds & pouces.
Exemple. On veut multiplier O K 2. pieds, 5. pouces, par P Q 1. pied, 8. pouces, & multiplier leur produit par K L M N 12. pieds, 9. pouces.

O K — 2 pieds ———— 5 pouces.
P Q — 1 pied ———— 8 pouces.

Superficie. R 2 —— S 21 —— T 40
pieds quar. pouc. sur pi.