



Condorcet (1743-1794)

Une relation d'ordre, notée ici $<$, est transitive, c'est à dire que : si $A < B$ et $B < C$ alors $A < C$.

La non-transitivité, comme dans les trois dés, ci-contre, est toujours une énorme surprise pour ceux qui ne connaissent pas cette possibilité.

Un autre cas de non-transitivité étonnant : l'effet Condorcet.

Cet effet peut se rencontrer, par exemple, lorsqu'il s'agit d'élire, à la majorité, un président parmi 3 candidats A, B et C. Si on vote alors deux candidats par deux candidats, on peut se trouver dans une situation où une majorité de votants préfèrent A à B, mais aussi B à C, tout en préférant C à A : de sorte qu'il n'y a pas transitive des préférences collectives !

Et pourtant chaque votant est cohérent avec lui même et respecte la transitive de ses propres préférences.

Voici un cas où les préférences de chacun débouchent sur un effet Condorcet :

Triplet de préférences	Nombre de votants pour ce triplet
A > B > C	14
A > C > B	3
B > A > C	4
B > C > A	11
C > A > B	7
C > B > A	6

Pour un tel ensemble de 45 votants à la majorité...

- A > B pour 24 votants,
- B > C pour 29 votants,
- C > A pour 24 votants,
- A > B > C > A !

LE JEU DU DIABLE

Le diable vous propose de jouer aux dés pendant toute une journée, vous avec un dé, lui avec un autre dé. À chaque lancer, celui qui fait le plus grand nombre gagne un point ; et à la fin de la journée, celui qui a le plus de points a gagné.

Cependant, il vous laisse choisir votre dé parmi trois dés, lui prenant alors l'un de ceux que vous n'avez pas choisis.

— Vous pouvez choisir ainsi, vous dit-il, le dé que vous estimez le meilleur !

Les trois dés (à six faces) sont les suivants :

Le dé A présente 2 fois chaque nombre 1, 6, 8.

Le dé B présente 2 fois chaque nombre 2, 4, 9.

Le dé C présente 2 fois chaque nombre 3, 5, 7.



Le diable est évidemment très fort ! Et, dans ce jeu où il semble vous laissez le choix du meilleur dé, il est encore plus fort que vous le croyez.

Car quel que soit votre dé choisi, il pourra en choisir un meilleur que le vôtre !

En effet, si vous choisissez le dé A, il choisira le dé B, qui gagnera sur le A, en moyenne, 5 lancers sur 9.

Et si vous choisissez le dé B, il choisira le dé C, qui gagnera sur le B, en moyenne, 5 lancers sur 9.

Et si vous choisissez le dé C, il choisira le dé A, qui gagnera sur le C, en moyenne, 5 lancers sur 9.

Aussi incroyable que cela paraisse, en termes de performance moyenne, le classement des dés deux à deux n'est pas « transitif ».

Ainsi, on pourrait écrire

$$A > C > B > A.$$

Vous pouvez le vérifier sans peine en établissant les tableaux suivants :

		B				C				A				
		2	4	9		3	5	7		1	6	8		
A	1	B	B	B	B	2	C	C	C	C	3	C	A	A
	6	A	A	B		4	B	C	C		5	C	A	A
	8	A	A	B		9	B	B	B		7	C	C	A

Une étude plus poussée montrerait que, en jetant 100 fois les deux dés, le diable à 97,7 chances sur 100 d'avoir plus de points que vous...