



Condorcet (1743-1794)

Une relation d'ordre, notée ici  $<$ , est transitive, c'est à dire que : si  $A < B$  et  $B < C$  alors  $A < C$ .

La non-transitivité, comme dans les trois dés, ci-contre, est toujours une énorme surprise pour ceux qui ne connaissent pas cette possibilité.

**Un autre cas de non-transitivité étonnant : l'effet Condorcet.**

Cet effet peut se rencontrer, par exemple, lorsqu'il s'agit d'élire, à la majorité, un président parmi 3 candidats A, B et C. Si on vote alors deux candidats par deux candidats, on peut se trouver dans une situation où une majorité de votants préfèrent A à B, mais aussi B à C, tout en préférant C à A : de sorte qu'il n'y a pas transitive des préférences collectives !

Et pourtant chaque votant est cohérent avec lui même et respecte la transitive de ses propres préférences.

Voici un cas où les préférences de chacun débouchent sur un effet Condorcet :

Triplet de préférences	Nombre de votants pour ce triplet
A > B > C	14
A > C > B	3
B > A > C	4
B > C > A	11
C > A > B	7
C > B > A	6

Pour un tel ensemble de 45 votants à la majorité...

- A > B pour 24 votants,
- B > C pour 29 votants,
- C > A pour 24 votants,
- A > B > C > A !

## LE JEU DU DIABLE

Le diable vous propose de jouer aux dés pendant toute une journée, vous avec un dé, lui avec un autre dé. À chaque lancer, celui qui fait le plus grand nombre gagne un point ; et à la fin de la journée, celui qui a le plus de points a gagné.

Cependant, il vous laisse choisir votre dé parmi trois dés, lui prenant alors l'un de ceux que vous n'avez pas choisis.

— Vous pouvez choisir ainsi, vous dit-il, le dé que vous estimez le meilleur !

Les trois dés (à six faces) sont les suivants :

**Le dé A présente 2 fois chaque nombre 1, 6, 8.**

**Le dé B présente 2 fois chaque nombre 2, 4, 9.**

**Le dé C présente 2 fois chaque nombre 3, 5, 7.**



Le diable est évidemment très fort ! Et, dans ce jeu où il semble vous laissez le choix du meilleur dé, il est encore plus fort que vous le croyez.

*Car quel que soit votre dé choisi, il pourra en choisir un meilleur que le vôtre !*

En effet, si vous choisissez le dé A, il choisira le dé B, qui gagnera sur le A, en moyenne, 5 lancers sur 9.

Et si vous choisissez le dé B, il choisira le dé C, qui gagnera sur le B, en moyenne, 5 lancers sur 9.

Et si vous choisissez le dé C, il choisira le dé A, qui gagnera sur le C, en moyenne, 5 lancers sur 9.

Aussi incroyable que cela paraisse, en termes de performance moyenne, le classement des dés deux à deux n'est pas « transitif ».

Ainsi, on pourrait écrire

$$A > C > B > A.$$

Vous pouvez le vérifier sans peine en établissant les tableaux suivants :

		B				C				A				
		2	4	9		3	5	7		1	6	8		
A	1	B	B	B	B	2	C	C	C	C	3	C	A	A
	6	A	A	B		4	B	C	C		5	C	A	A
	8	A	A	B		9	B	B	B		7	C	C	A

Une étude plus poussée montrerait que, en jetant 100 fois les deux dés, le diable à 97,7 chances sur 100 d'avoir plus de points que vous...