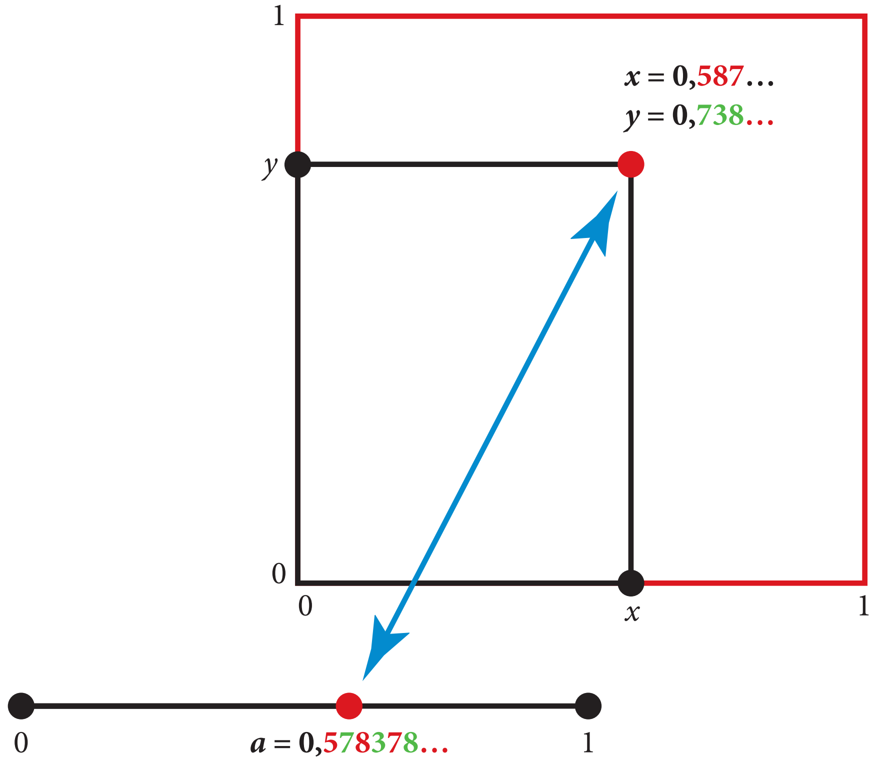
Une incroyable bijection

La courbe de Peano a évidemment une longueur infinie.
Et il est facile de montrer qu'elle remplit tout un carré.
Voici d'ailleurs (construite sur le même principe, ici en base 10, et non plus en base 4) une correspondance que l'on peut établir **entre le segment [0,1] et le carré [0,1] × [0,1]** :
L'abscisse d'un point du segment étant donnée, on lui fait correspondre un couple de nombres : le nombre obtenu en ne gardant que les chiffres d'ordre impair du développement décimal (ce sera l'abscisse d'un point du carré) et le nombre obtenu en ne gardant que les chiffres d'ordre pair du développement décimal (ce sera l'ordonnée du point du carré).
À chaque point du segment, on a ainsi fait correspondre un point du carré.

Inversement, l'abscisse et l'ordonnée d'un point du carré étant données, on lui fait correspondre le nombre obtenu en prenant alternativement un chiffre de son abscisse et un chiffre de son ordonnée (à la manière dont le magicien arrive à battre « à l'américaine » les deux parties d'un jeu de cartes) ; c'est cette correspondance à laquelle notre intuition spontanée résiste le plus :
À chaque point du carré, on a ainsi fait correspondre un point du segment.



Cette propriété fit l'objet d'une célèbre et une hallucinante correspondance entre **Georg Cantor** (1845-1918) et **Richard Dedekind** (1831-1916) de 1874 à 1877.
Le 5 janvier 1874, Cantor écrivait en effet ceci à Dedekind :
Est-ce qu'une surface peut être mise en correspondance bi-univoque avec une courbe, de sorte qu'à tout point de la surface corresponde un point de la courbe, et inversement ?
Et le 29 juin 1977, Cantor, ayant démontré l'existence d'une telle correspondance, écrivait à son collègue : *Je le vois, mais je ne le crois pas !*
Lettre à laquelle Dedekind répondait le 2 juillet :
Cher ami, je suis entièrement convaincu par votre démonstration.