Europe 1742

Les énigmes des nombres premiers

En ce début d'été 1742, Léonard Euler se promenait avec son fils, sur la terrasse du château de Sans-Souci, accompagnés du roi Frédéric II de Prusse. Le petit Jean-Albert aimait bien écouter son père lui parler de mathématiques comme à un grand, exactement comme il parlait au roi lui-même. Ils s'étaient assis sur un banc qui dominait toute la ville de Postdam et Euler venait de leur expliquer ce qu'était un nombre « premier *».
— Ce qui est amusant, disait Euler, c'est que ces nombres semblent se distribuer n'importe comment ; parfois, ils se suivent de près, comme 29 et 31 ; d'autres fois ils se font plus rares (comme entre 181 et 191).

Le magnifique jet d'eau qui jaillissait dans le bassin, trente mètres plus bas, sembla tout d'un coup monter plus haut encore…

Léonard Euler, pensif, sortit une lettre de sa poche ; elle était datée du 4 juin 1742.
— Mon ami Christian Goldbach m'écrit de Saint Petersbourg, dit-il, pour me poser une bien curieuse question que, même toi qui va bientôt avoir neuf ans, Jean-Albert, tu peux parfaitement comprendre. Choisis un nombre pair, n'importe lequel.
— 88.
— Eh bien ! c'est la somme de deux nombres premiers !

Les nombres premiers infé rieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Léonard Euler

Jean-Albert chercha dans la liste des nombres premiers jusqu'à 100, que son père lui avait écrite ce matin (voir ci-dessous) et s'écria :
— 17 + 71 !
— Christian Goldbach pense que cette hypothèse, cette *conjecture* serait vraie pour tous les nombres pairs, dit Euler en réfléchissant : tout nombre pair serait la somme de deux nombres premiers… peut-être faudra-t-il deux ou trois centaines d'années pour démontrer qu'elle est vraie, … ou pour démontrer qu'elle est fausse, qui sait ? **

* Qu'est-ce qu'un nombre premier ?

Un nombre premier est un nombre entier qui n'est divisible par aucun nombre, à part, bien sûr, lui-même et 1.
Ainsi 3 est un nombre premier (il n'est divisible que par lui-même et par 1) tandis que 4 n'est pas un nombre premier (il est divisible par lui-même et par 1, mais aussi par 2). Le nombre 1 n'est pas considéré comme premier.
Les nombres premiers sont importants car ils constituent les "briques" élémentaires qui permettent de fabriquer, par multiplication, tous les autres nombres entiers.
Les mathématiciens les ont étudiés activement depuis toujours et surtout depuis le XVIIIe siècle.
Et on trouve encore de nos jours de nouvelles applications à cette notion…

14

? Dans la liste ci-dessous, trois nombres sont premiers. **Lesquels ?** Pourquoi les autres ne sont-ils pas premiers. 14 ; 15 ; 23 ; 27 ; 37 ; 57 ; 77 ; 89 ; 99.

15

? ** **La conjecture de Goldbach**
En 2009, la conjecture dont l'histoire t'est racontée à la page précédente n'est toujours pas démontrée…
Choisis toi-même quelques nombres pairs et écris-les comme somme de deux nombres premiers.

Sophie Germain, Gauss et les nombres premiers

L'Europe scientifique ne date pas d'aujourd'hui ! Ainsi le grand mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss échangea plus de sept mille lettres avec des mathématiciens entre 1800 et 1810 !
Parmi ses correspondants, l'un d'eux est particulièrement remarquable. En effet, c'est sous un pseudonyme masculin que la mathématicienne Sophie Germain écrit au grand homme, de peur que ses travaux ne soient pas pris au sérieux parce que venant d'une femme. Pourtant, les talents mathématiques de Sophie n'ont en rien à envier à ceux des autres mathématiciens de son époque. Elle s'intéresse elle aussi à certains nombres premiers, que l'on appellera les *nombres de Sophie Germain*.
Un *nombre de Sophie Germain* est un nombre premier p tel que $2p + 1$ soit lui aussi un nombre premier.
Ainsi 5 est un nombre de Sophie Germain (5 et $2 \times 5 + 1 = 11$ sont tous deux premiers) alors que 7 n'est pas un nombre de Sophie Germain ($2 \times 7 + 1 = 15$ n'est pas premier).
Et tandis que Gauss démontrait que le *théorème de Fermat* (voir p. 21) était vrai pour tous les nombres premiers inférieurs à 100, Sophie, elle, le montrait pour tous les nombres premiers… de Sophie Germain.

Buste de Sophie Germain, (Lycée Sophie Germain à Paris).

16

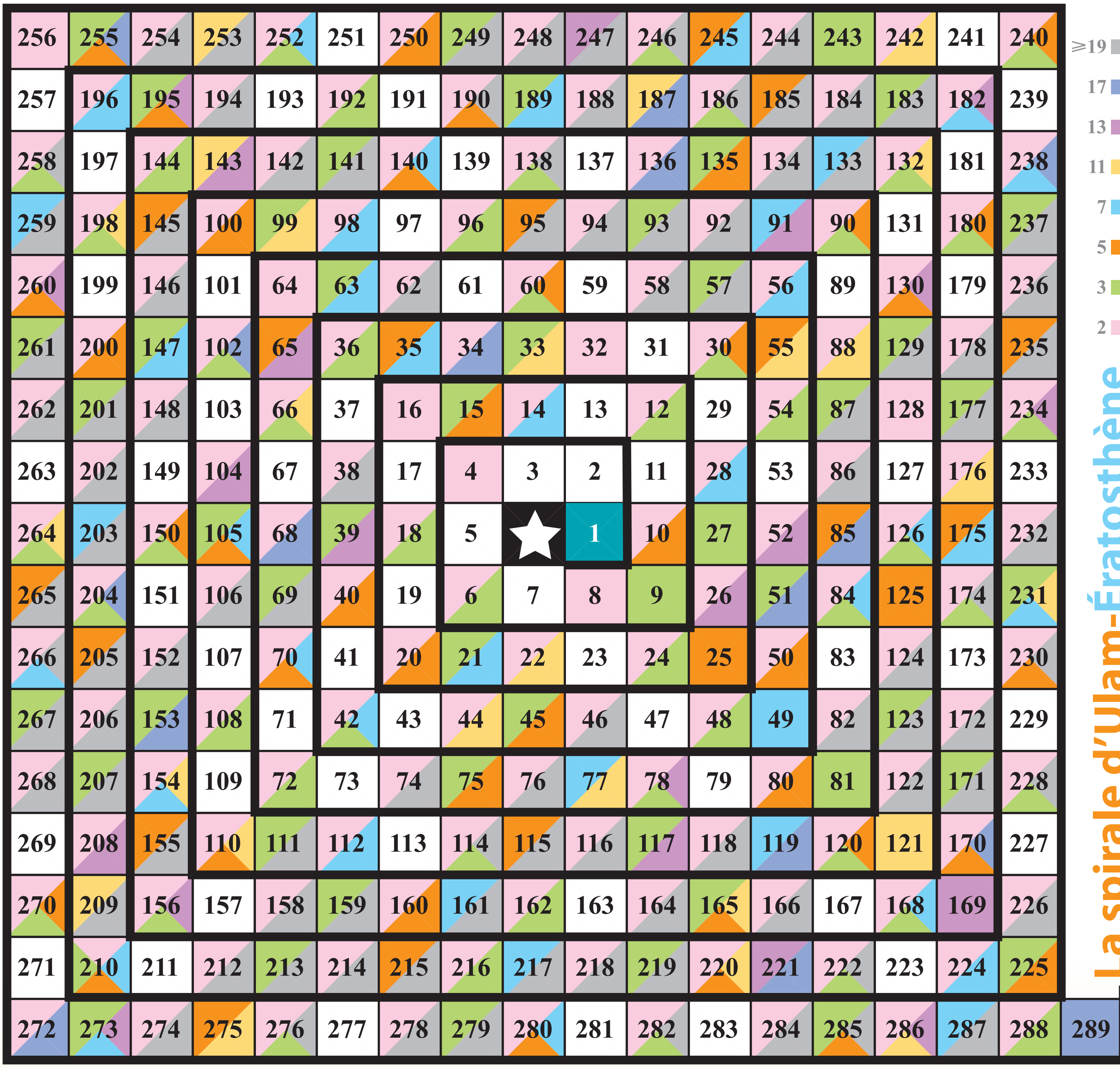
? Parmi les nombres premiers inférieurs à 100, **trouve les dix qui sont des "nombres de Sophie Germain".**

2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89.

17

? **Page suivante**, tu peux repérer les **nombres premiers** entre 1 et 289.
En regardant comment est coloriée la case d'un nombre, tu vois combien ce nombre a de diviseurs premiers et quels ils sont.
Quels sont les diviseurs premiers de 84 ? et de 117 ? Trouve dans la grille un nombre ayant un seul diviseur premier ? et un nombre ayant quatre diviseurs premiers ?

La spirale d'Ulam-Ératosthène



Le dessin ci-dessus te permet de connaître les nombres premiers inférieurs à 289 : ce sont les nombres dont la case est laissée en blanc.

Voici le principe utilisé pour réaliser ce dessin.

L'idée pour colorier les cases vient du mathématicien grec Eratosthène qui vivait à Alexandrie au 3e siècle avant J.-C.

• 2 est le plus petit nombre premier : on le laisse en blanc. Ses multiples, eux, ne peuvent pas être premiers (ils ont 2 comme diviseur) : on met du rose dans leur case.

• Le nombre suivant non colorié, 3, est un nombre premier : on le laisse en blanc et on met du vert dans les cases de tous ses multiples.

Et ainsi de suite : le premier nombre non encore colorié est un nombre premier, qu'on laisse en blanc mais dont on colorie les multiples avec une nouvelle couleur ; ainsi pour les multiples de 5, 7, 11, 13, 17 ; au-delà de 17, nous avons colorié uniformément en gris les multiples de 19, de 23, de 29…

L'idée de la disposition en spirale des nombres vient, elle, d'un mathématicien américain, Stanislaw Ulam, mort en 1984. Curieusement, il a vu alors apparaître des séries de nombres premiers alignés le long de segments de droites. On peut trouver quelques explications locales à ces alignements ; mais la distribution plutôt chaotique des nombres premiers reste un excitant mystère…

84 a 3 diviseurs premiers : 2, 3, 7. Et 117 a 2 diviseurs premiers : 3 et 13. Les entiers 8, 16, 64,… , 27, 81,… n'ont chacun qu'un seul diviseur premier. 210 = 2 × 3 × 5 × 7 a quatre diviseurs premiers.