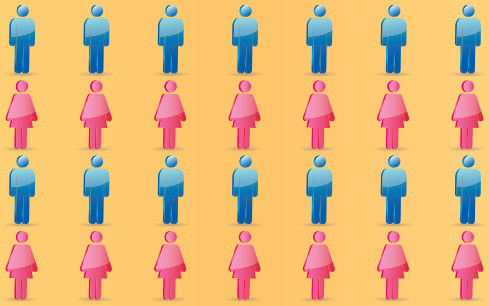
L'aventure des nombres parfaits

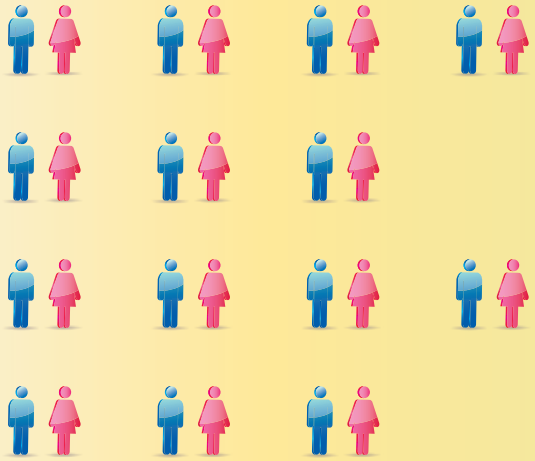
Les nombres parfaits

Nous sommes 28 dans notre classe.
Parfois chacun de nous travaille seul,
et nous sommes alors séparés, 1 par 1.

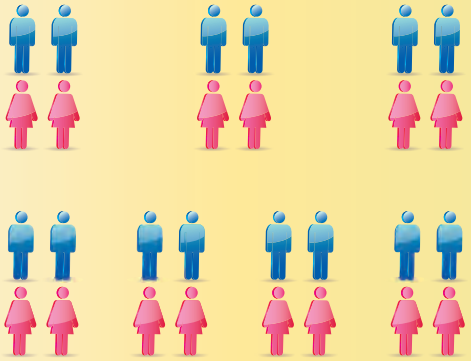


On peut aussi diviser la classe en groupes,
de toutes les manières possibles…

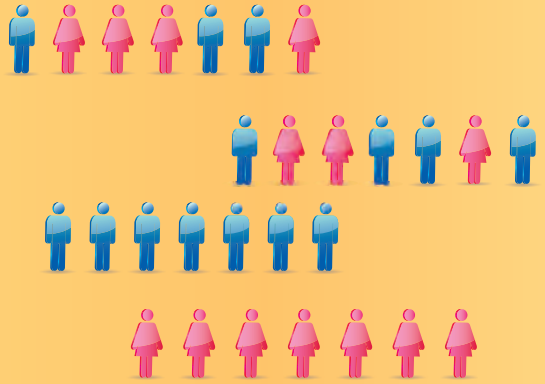
… par exemple, en binômes, 2 par 2…



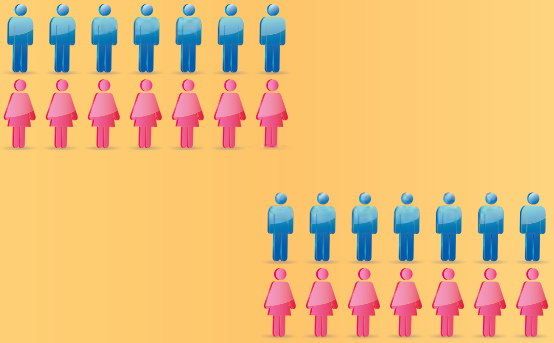
… ou bien en groupes de 4…



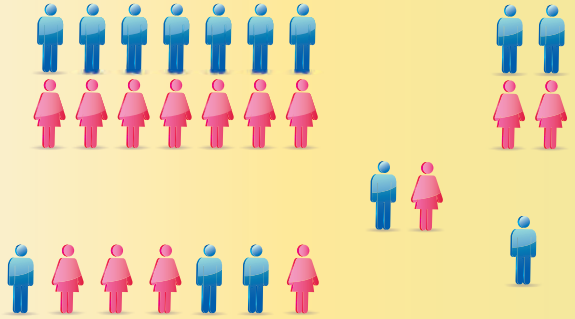
… ou encore en groupes plus nombreux, par 7



… ou, même, en demi-classes de 14.



Aujourd'hui, on a décidé de réunir un groupe
de 14, un groupe de 7, un groupe de 4,
un groupe de 2 et un tout seul…



Incroyable ! On est toujours 28 !

Ça alors ! Est-ce que ça serait pareil avec un autre nombre que 28 ?

Eh non ! **Les nombres qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs (autres qu'eux-mêmes) s'appellent des nombres parfaits.**

28 est donc parfait. Y a-t-il beaucoup d'autres nombres qui méritent d'être qualifiés de parfaits ?

Non, pas beaucoup, on croit même les connaître tous : il y en a exactement autant que de nombres de Mersenne premiers !

Quèsaco ? Les nombres de Mersenne ?

Un nombre de Mersenne est, tout simplement, un nombre égal à une puissance de deux diminuée de un, comme 1 3 7 15 31 63 …
Quelques-uns de ces nombres sont premiers, comme tu le vois dans cette liste :

$2^1 - 1 = 1$	**$2^2 - 1 = 3$**
$2^3 - 1 = 7$	$2^4 - 1 = 15$
$2^5 - 1 = 31$	$2^6 - 1 = 63$
$2^7 - 1 = 127$	$2^8 - 1 = 255$
$2^9 - 1 = 511$	$2^{10} - 1 = 1\,023$
$2^{11} - 1 = 2\,047$	$2^{12} - 1 = 4\,095$
$2^{13} - 1 = 8\,191$	$2^{14} - 1 = 16\,383$
$2^{15} - 1 = 32\,767$	$2^{16} - 1 = 65\,535$
$2^{17} - 1 = 131\,071$	$2^{18} - 1 = 262\,143$
$2^{19} - 1 = 524\,287$	$2^{20} - 1 = 1\,048\,575$…

Ceux qui sont premiers sont en gras et écrits en rouge.

Marin Mersenne (1588-1648) était un « homme de contact ». Il connaissait tous les savants et les mathématiciens de son époque ; infatigable voyageur, il allait les voir et discutait avec eux ; et il entretenait, avec les plus grands, une extraordinaire correspondance. Descartes, Pascal, Torricelli, Fermat, lui envoyaient leurs idées et leurs résultats, qu'il s'empressait de communiquer aux autres…

Mersenne a donné son nom à une suite de nombres très étudiés, les nombres de la forme $2^n - 1$.
Certains nombres de Mersenne sont premiers, par exemple : 3, 7, 31, 127. D'autres ne le sont pas (comme 15, 63 ou 255 bien sûr, mais aussi $511 = 7 \times 73$ ou $2047 = 23 \times 89$).
Avant Mersenne lui-même, on savait que les 13e, 17e et 19e nombres de Mersenne étaient premiers.
Vers 1750, Euler montra que $2^{31} - 1$, égal à 2 147 483 647, était premier.
En 2010, on connaissait 47 nombres de Mersenne premiers.
Le tout dernier trouvé, fin 2017, est le 50e : $2^{77\,232\,917} - 1$.
Il s'écrit avec près de 23 millions de chiffres.
Les internautes du projet GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) recherchent activement tous les membres de la famille…

Curieusement le premier qui a découvert la liaison entre les nombres parfaits et les nombres de Mersenne premiers vivait environ 20 siècles avant celui de Mersenne !
Voici la définition donnée au début du septième livre des *Éléments* d'Euclide :
Le nombre parfait est celui qui est égal à la somme de ses parties.
(Les « parties » d'un nombre sont ses diviseurs autres que lui.)
Et dans le neuvième livre de ses *Éléments*, voici la proposition numéro 36 :
Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

Rien compris !

Pour mieux comprendre ce qu'Euclide a voulu dire, relisons sa phrase morceau par morceau…

Si, à partir de l'unité,
On part donc du nombre 1…
tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels
… on écrit des nombres obtenus en les multipliant successivement par un même nombre a :
$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \ldots$
On obtient une progression géométrique…
en *raison double*…
… ici de raison égale à 2. Ces nombres sont donc exactement les puissances successives de 2, c'est-à-dire :
$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \ldots 2^{p-1}$.
jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier,
… la somme de ces nombres s'exprime assez facilement ; en effet $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{p-1}$ vaut $2^p - 1$, comme le montre l'encadré, page suivante.
Par exemple, pour $p = 3$, la somme $1 + 2 + 4$ vaut $2^3 - 1$, soit 7 et le nombre 7 est premier…
et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre,
… dans l'exemple $7 \times 4 = 28$.
Plus généralement, appelons M la somme égale à $2^p - 1$ (c'est donc un *nombre de Mersenne*) et calculons $M \times 2^{p-1}$ (avec M premier)…
le *produit sera un nombre parfait*.
… 28 est effectivement un nombre parfait.
2^{p-1} vaut $\frac{M+1}{2}$ et le nombre qu'Euclide dit être parfait est le nombre $\frac{M(M+1)}{2}$; si M est premier, ce produit $M^1 \times 2^{p-1}$ est exactement sa décomposition en facteurs premiers ; d'après le résultat en bas de la page 18, ce nombre a donc $2 \times p$ diviseurs, égaux à

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & \ldots & 2^{p-1} \\ \text{et } M & 2M & 4M & 8M & \ldots & 2^{p-1}M. \end{array}$$

La somme de tous ces diviseurs vaut
$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{p-1})(M + 1)$,
soit $M(M + 1)$, c'est-à-dire deux fois lui-même.
Et donc la somme (sans lui-même) des diviseurs du nombre $M \times 2^{p-1}$, égal à $\frac{M(M+1)}{2}$, vaut lui-même.

Ce nombre $\frac{M(M+1)}{2}$ est donc parfait !

Par exemple, les deuxième, troisième, cinquième et septième nombres de Mersenne sont premiers. Ils donnent 4 nombres parfaits :

$$2 \times (2^2 - 1) = 6$$
$$2^2 \times (2^3 - 1) = 28$$
$$2^4 \times (2^5 - 1) = 496$$
$$2^6 \times (2^7 - 1) = 8\,128.$$

Un exercice : chercher les diviseurs de 496 et 8128 et vérifier que ces deux nombres sont parfaits.

Un cadeau :
On a, pour le nombre parfait 28, l'égalité :

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

En divisant les deux membres par 28, on a

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1,$$

qui est une égalité tout à fait remarquable, comme l'est aussi $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ puisque 6 est aussi parfait…