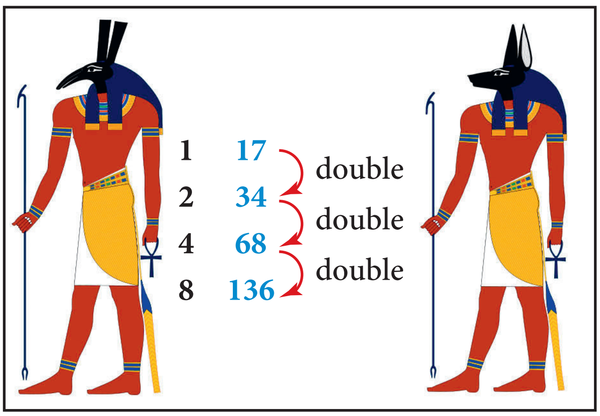
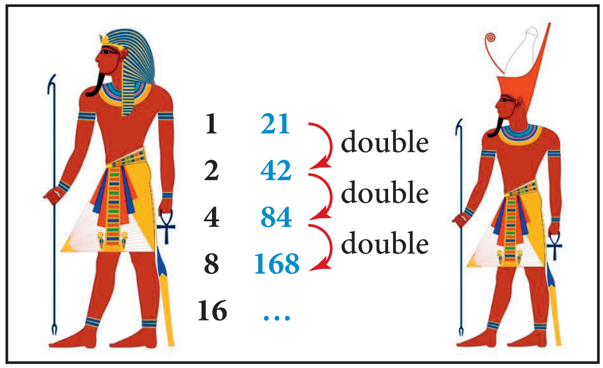
La multiplication égyptienne

L'algorithme de la multiplication égyptienne s'appuie sur des duplications successives.
Autrement dit sur des multiplications par 2.
Pour multiplier par 2, on double le nombre.
Doubler un nombre c'est l'additionner à lui-même.
Pour multiplier par 4, on le double et on double le résultat.
Pour multiplier par 8, on le double et on double le résultat et on le double encore.
Exemple : Pour multiplier 17 par 8 :



Si le multiplicande n'est pas une puissance de 2.
Il faut savoir que chaque nombre peut s'écrire comme une somme des puissances de 2 (voyez l'encadré *L'écriture d'un nombre « en base deux »*, avec les deux chiffres 0 et 1).
La multiplication égyptienne de 13 fois 21 va donc se poser, en 2 colonnes, ainsi :



On s'arrête au doublement 8, car 16 est plus grand que 13.

L'écriture des nombres en base deux

$1 = 1 = 1 \times 2^0 = 1$ en base deux
$2 = 2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10$ en base deux
$3 = 2 + 1 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$ en base deux
$4 = 4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 100$ en base deux
$5 = 4 + 1 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 101$ en base deux
$6 = 4 + 2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 110$ en base deux
$7 = 4 + 2 + 1 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 111$ en base deux
…
$15 = 8 + 4 + 2 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1111$ en base deux
$16 = 16 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10000$ en base deux
$17 = 16 + 1 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 10001$ en base deux
…
$29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11101$ en base deux
$30 = 16 + 8 + 4 + 2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 11110$ en base deux
$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11111$ en base deux
…
Ainsi tous les nombres de 0 à 31 peuvent se représenter par une suite de cinq chiffres égaux à 1 ou à 0.
Et donc aussi par une suite de cinq informations du genre OUI ou NON.
Et donc aussi par une main aux cinq doigts levés ou baissés.
C'est ainsi que nous avons numéroté les pages de cette brochure…

Comme $13 = 8 + 4 + 1$

$13 \times 21 = (8 + 4 + 1) \times 21$

$= (8 \times 21) + (4 \times 21) + (1 \times 21)$

$= 168 + 84 + 21 = 273.$

On additionne donc les nombres de la colonne de droite correspondants aux lignes de 8, 4 et 1, c'est-à-dire aux « 1 » dans l'écriture du nombre en base deux.

Autre exemple : 43×17.

×	1	17
×	2	34
	4	68
×	8	136
	16	272
×	32	544

$43 = 32 + 8 + 2 + 1$

On a marqué d'une croix les puissances de 2 dont la somme est 43 et on calcule donc

$$544 + 136 + 34 + 17 = 731.$$

On trouve $43 \times 17 = 731$.

Toute multiplication peut ainsi se faire avec des doublements et des additions.

Énigme VIII

Écrire en somme de puissances de 2, les nombres 31, 32 et 33 ?

Dans le tableau ci-contre, quels nombres faut-il additionner pour trouver le produit de 17 par 31 ? de 17 par 32 ? et de 17 par 33 ?

Les entiers de 1 à 100 en notation binaire									
1	1	21	10101	41	101001	61	111101	81	1010001
2	10	22	10110	42	101010	62	111110	82	1010010
3	11	23	10111	43	101011	63	111111	83	1010011
4	100	24	11000	44	101100	64	1000000	84	1010100
5	101	25	11001	45	101101	65	1000001	85	1010101
6	110	26	11010	46	101110	66	1000010	86	1010110
7	111	27	11011	47	101111	67	1000011	87	1010111
8	1000	28	11100	48	110000	68	1000100	88	1011000
9	1001	29	11101	49	110001	69	1000101	89	1011001
10	1010	30	11110	50	110010	70	1000110	90	1011010
11	1011	31	11111	51	110011	71	1000111	91	1011011
12	1100	32	100000	52	110100	72	1001000	92	1011100
13	1101	33	100001	53	110101	73	1001001	93	1011101
14	1110	34	100010	54	110110	74	1001010	94	1011110
15	1111	35	100011	55	110111	75	1001011	95	1011111
16	10000	36	100100	56	111000	76	1001100	96	1100000
17	10001	37	100101	57	111001	77	1001101	97	1100001
18	10010	38	100110	58	111010	78	1001110	98	1100010
19	10011	39	100111	59	111011	79	1001111	99	1100011
20	10100	40	101000	60	111100	80	1010000	100	1100100