Le nombre 36

L'affiche du Kangourou 2026, ou 36ème Kangourou des mathématiques, propose quelques apparitions du nombre 36.

. Un « pentagramme » est le nom d'un pentagone régulier étoilé ; il est souvent accompagné du pentagone régulier convexe de même cercle circonscrit). Tous ses angles sont des multiples du décitour (un dixième de tour, soit 36°).

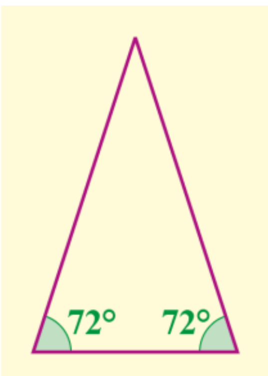
. Un carré (6×6) de 36 kangourous coloriés en 2 couleurs (son haut et son bas) parmi 6 possibles.

. Un ensemble de 36 pavés, pouvant se distribuer,
soit pour former un dallage carré, de côté 1+2+3,
soit pour former 3 cubes de 1^3, 2^3 et 3^3 pavés,
et montrant donc que $36 = (1+2+3)^2 = 1^3+2^3+3^3$.

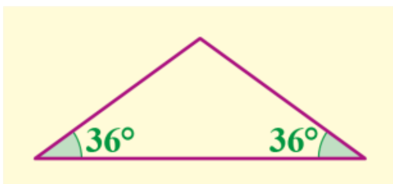
Le Kangourou vous propose ici quelques activités, avec les élèves, illustrant ces diverses propriétés…

Le pentagramme

Cette figure a souvent été considérée comme ayant des pouvoirs magiques et se retrouve dans de nombreux textes ésotériques. À preuve, l'amusante nouvelle de Fredric Brown reproduite en pages 6 et 7 de ce document : *Le pentagramme magique* (où l'on a rappelé une construction des pentagones réguliers).
Il est très facile de montrer (à l'aide des angles inscrits) que les angles de 1, de 2 et de 3 décitours marqués sur la figure de l'affiche valent bien ce qu'ils sont !
Il est rigolo de voir qu'il y a ainsi 5×(4+3), soit 35 angles représentés, un 36ème kangourou figurant au centre de la figure !
À l'école ou au collège, on peut distribuer aux élèves des gabarits en forme de triangle, d'angles de 36° (72° et 72°) pour vérifier (ou pour réaliser) les angles des pentagrammes.



Le triangle isocèle d'angles 36°, 72° et 72°, s'appelle *triangle d'or aigu*, car le rapport des longueurs du grand côté sur le petit, vaut le nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, approximativement égal à 1,618…
Le triangle isocèle d'angles 36°, 36° et 108°, s'appelle *triangle d'or obtus*. Il est aussi dessiné dans le pentagramme.



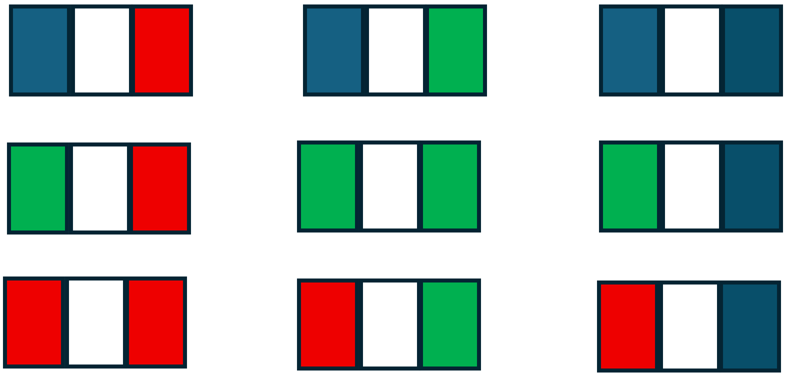
Notez qu'un jeu distribué par le Kangourou, il y a quelques années, propose dix exemplaires en mousse de ces triangles, pour réaliser certains assemblages.
Voyez www.mathkang.org/catalogue/prodtor.html

Le coloriage des 36 Kangourous

Si on a le choix de 6 couleurs pour colorier 2 régions, il y a évidemment 6×6 coloriages possibles. Ces coloriages sont naturellement placés dans un carré 6×6.
C’est ce que nous avons fait, pour les kangourous, sur l’affiche.

On peut proposer aux élèves (écoliers ou collégiens) de colorier, de la même façon, tout objet en 2 couleurs, avec 6 couleurs possibles : rouge, violet, bleu, vert, jaune, orange.
Un autre exemple est constitué par les drapeaux ayant une couleur à gauche~~,~~ du blanc et une couleur à droite (soit 2 couleurs à choisir parmi 6). Le tableau des 36 drapeaux possibles est joli et intéressant (avec les drapeaux unicolores sur une diagonale).

Mais on peut aussi faire des tableaux n×n avec n couleurs.
Voici, par exemple, le tableau des 3×3, soit 9 drapeaux, analogues aux précédents avec 3 couleurs au lieu de 6 :



$36 = 6\times6 = (1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1+8+27 = 36$

Ces égalités sont illustrées par les deux dessins en bas à gauche de l’affiche.
Plus généralement, on connaît depuis environ mille ans une fantastique formule, d’abord démontrée par un mathématicien arabe qui s’occupait en particulier de la distribution des eaux d’irrigation dans la grande ville de Bagdad. Il s’appelait Al-Karaji, et « sa » formule affirme ceci :

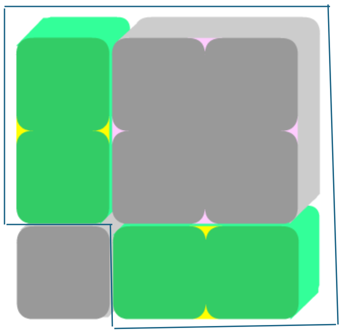
Le carré de la somme des premiers nombres entiers est égal à la somme de leurs cubes.

Quand le père du Kangourou avait 12 ans, c’est la découverte de cette formule qui l’avait impressionné au point de le décider à faire des maths sa vie durant : il avait en effet remarqué que la somme 1+2+3+4 valait juste 10 tout rond ! et que la somme des 4 premiers cubes, $1^3+2^3+3^3+4^3$, valait un nombre encore plus rond (100) !! et que ce 100 était le carré de 10 !!!
Il se trouve que la démonstration de cette formule peut s’expliquer à un enfant.
Il suffit en effet de disposer de quelques petits cubes colorés (36 par exemple) selon une disposition simple :
comme sur le dessin de l’affiche en bas à gauche, pour former une surface de 6 sur 6,
mais on peut alors lui montrer qu’on peut fabriquer 3 cubes en reprenant ces mêmes 36 petits cubes, en replaçant l’un sur l’autre les petits cubes de même couleur, comme sur la deuxième figure.
Et ce qui est extraordinaire, c’est que cette astuce peut recommencer, comme le suggèrent les deux pages suivantes, avec 4 petits cubes, ou plus ….

1

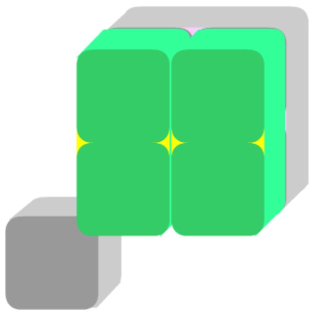
$$1^2 = 1^3$$

2



$$(1 + 2)^2$$

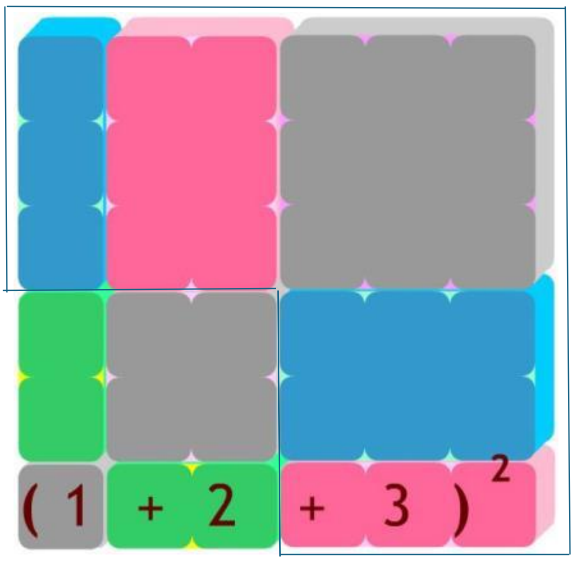
Portez votre attention sur les 3 assemblages de pavés gris et verts, encadrés d'un trait bleu fin.
En plaçant les deux assemblages de pavés verts pour former un carré au-dessus du carré gris 2x2,
on obtient un cube 2x2x2.



$$1^3 + 2^3$$

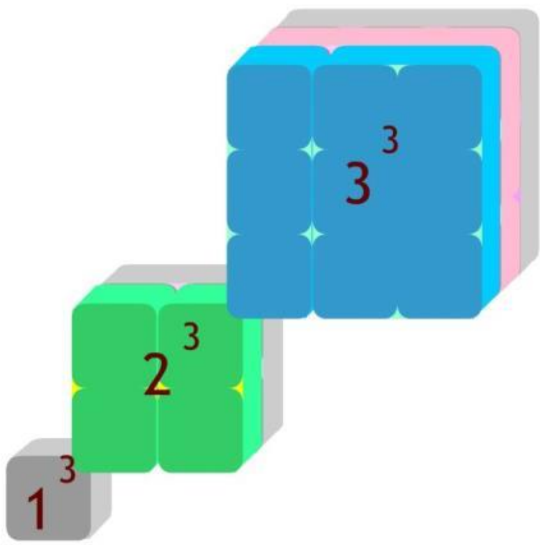
$$(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$$

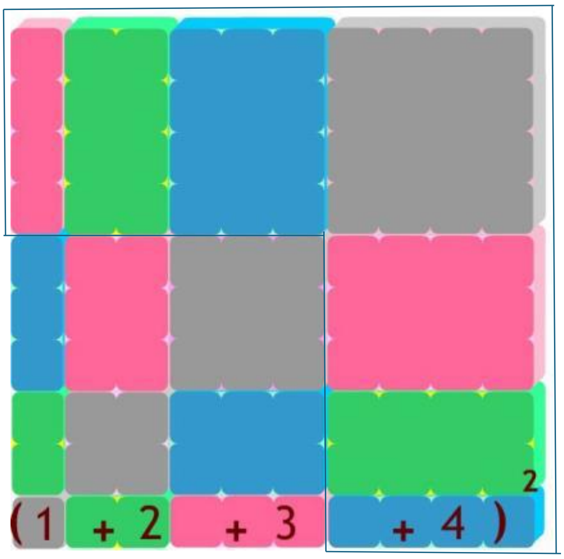
3



$$(1 + 2 + 3)^2$$
$$=$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3$$

Portez votre attention sur les 5 assemblages de pavés gris, roses et bleus, encadrés d'un trait bleu fin.
En plaçant les deux assemblages de pavés roses (2x3+1x3) pour former un carré au-dessus du carré gris 3x3,
puis en plaçant les deux assemblages de pavés bleus (1x3+2x3) pour former un troisième carré au-dessus, on obtient un cube 3x3x3.



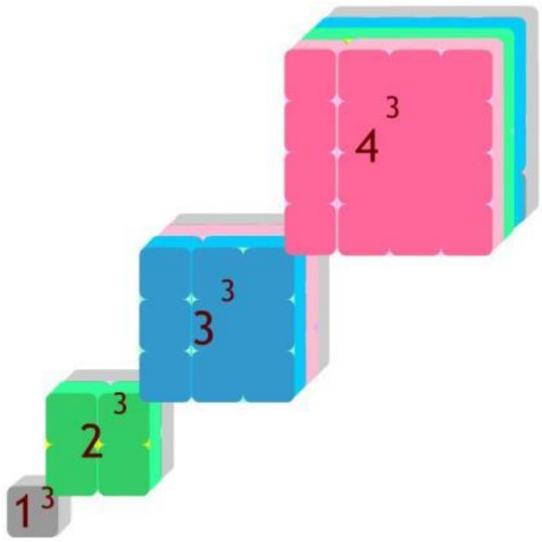


Portez votre attention sur les 7 assemblages de pavés gris, bleus, verts et roses encadrés d'un trait bleu fin. En plaçant les deux assemblages de pavés bleus (3x4+1x4) pour former un carré au-dessus du carré gris 4x4, puis en plaçant les deux assemblages de pavés verts (2x4+2x4) pour former un troisième carré au-dessus, puis en plaçant les deux assemblages de pavés roses (1x4+3x4) pour former quatrième carré au-dessus, on obtient un cube 4x4x4.

$$(1 + 2 + 3 + 4)^2$$

$$=$$

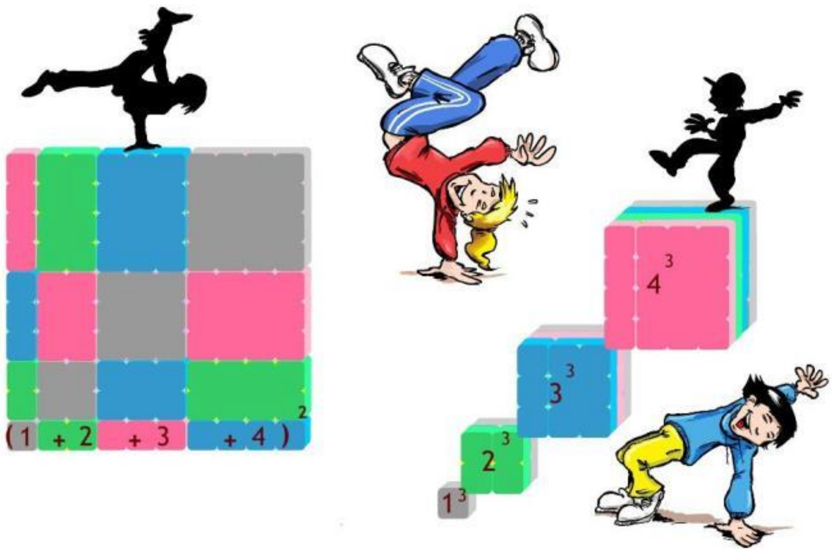
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$



Et il est facile de comprendre que ces assemblages de pavés peuvent être réalisés pour n'importe quel nombre n : $(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$.

En écoutant leur professeur raconter cette incroyable rencontre du calcul et de la géométrie, Alice, Matt et leurs camarades se mirent à danser autour des pavés qui avaient illustré la démonstration.

Ils manifestaient ainsi leur joie de constater, encore une fois, que les mathématiques sont une sorte de cour de récréation.



Dans cette cour, le jeu des nombres et de leurs calculs venait croiser avec bonheur les propriétés des figures géométriques…

Les 36 glaces à deux boules aux 9 parfums

Nous n'avons pas voulu surcharger l'affiche avec d'autres dessins à comprendre.
Mais nous aurions pu, par exemple, illustrer le fait que 36 est le nombre de manières de choisir 2 objets parmi 9 objets : en effet 36 = $\frac{9\times8}{2}$.

Voici un tableau montrant que le nombre de manières de choisir une glace à deux boules de parfums différents, parmi 9 parfums, est bien 36 :