KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2017

KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1990 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, trois cent dix mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

Il a été étendu dans le monde et réunit maintenant 6 millions de participants dans 70 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.aksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation aux *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).

Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou 2018 aura lieu le jeudi 15 mars 2018.

Trophées Kangourou 2017 - Corrigé de l'épreuve Benjamins (6^e - 5^e)

1. Réponse **C.** Écrire 3 fois de suite un nombre à deux chiffres revient à le multiplier par 10101. Et $10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$. Le nombre formé est donc toujours divisible par 7.

2. Réponse **C.** Le « 0 » impose qu'il n'y a pas de pièce dans ses deux tiroirs voisins.
Le « 2 » de la première colonne impose que chacun de ses deux tiroirs voisins a une pièce.
Alors le « 2 » de la deuxième colonne a déjà deux tiroirs voisins avec des pièces, son troisième voisin (1re ligne, 3^e colonne) est donc vide et le dernier tiroir (2^e ligne, 3^e colonne) doit avoir une pièce.
Le dessin ci-contre montre les tiroirs vides (–) et ceux avec une pièce (+). Il y a donc 3 pièces au total.

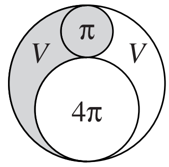
+	–	–
–	+	+

3. Réponse **D.** Il n'y a pas d'autres sommets que les sommets des pentagones et ils sont tous différents.
Il y a donc $\frac{60}{5}$ pentagones, soit 12.

4. Réponse **B.** Il y a 3 professeurs à la bonne place dans l'un des tableaux et 2 dans l'autre. Et, comme aucun des cinq professeurs n'est à la même place dans les deux tableaux, on en déduit que chaque professeur est à la bonne place dans un des deux tableaux. Entre les deux tableaux, M. Cauchy et Mme Germain sont inversés en 6ème C et 6ème D : ils sont donc tous les deux à la bonne place dans l'un des tableaux. On ne trouve alors qu'une seule possibilité : ces deux professeurs sont à la bonne place dans le deuxième tableau et la bonne répartition est celle-ci :

6ème A	6ème B	6ème C	6ème D	6ème E
M. Bézout	Mme Lovelace	Mme Germain	M. Cauchy	Mme Noether

5. Réponse **D.** Les trois cercles ont pour rayons 1, 2 et 3 cm.
Leurs aires sont donc égales, en cm^2, à π, 4π et 9π.



Chacune des régions en forme de virgule a donc une aire V égale à $\dfrac{9\pi-4\pi-\pi}{2}$ soit 2π.

L'aire grisée vaut donc 3π soit $\dfrac{1}{3}$ de l'aire de la figure (9π).

6. Réponse **D.** L'avance sur la montre de Pierre étant égale au retard sur la montre de Rachid (10 min par heure), le décalage de chacun avec la vraie heure est égal à la moitié du décalage entre les deux montres. Quand les montres marquent 17 h 35 et 19 h 15, elles sont décalées de 1 h et 40 min ou 100 min, et chacune a donc 50 min de décalage avec la vraie heure. La vraie heure est donc 50 min de plus que 17 h 35 soit 18 h 25 (qui vaut bien 50 min de moins que 19 h 15).

7. Réponse **B.** En groupant les nombres comme ceci : $(99-97)+(95-93)+\ldots\ldots+(15-13)+11$, le calcul comporte 22 soustractions ayant 2 pour résultat $[(99-11)/4=22]$ plus le nombre 11. Le résultat du calcul est donc $(2\times22)+11$, soit 55.

8. Réponse **A.** Si on obtient 16 comme reste dans la division de 177 par l'entier n c'est que $177-16$, soit 161 est multiple de n. Or $161=7\times23$. De même $2017-16$, soit 2001 est multiple de n. On vérifie que 7 ne divise pas 2001 mais que 23 divise 2001. L'entier par lequel les nombres ont été divisé est 23 dont la somme des chiffres est 5.
[On a $2001 = 3\times23\times29$.]

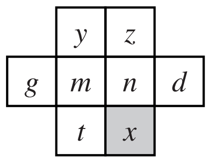
9. Réponse **E.** Supposons que Matagogo soit mort en 19du où d et u représentent les chiffres des dizaines et des unités.
On a :
$$\begin{array}{r} u\;d\;9\;1 \\ -\;1\;9\;d\;u \\ \hline 1\;2\;7\;8 \end{array}$$
ce qui donne $u=3$ et $d=1$. Matagogo est donc mort en 1913.
Il est probablement né au 19$^{\text{e}}$ siècle (ce que confirme les cinq réponses proposées), sa date de naissance est donc de la forme 18du et doit vérifier :
$$\begin{array}{r} u\;d\;8\;1 \\ -\;1\;8\;d\;u \\ \hline 1\;2\;7\;8 \end{array}$$
ce qui donne $u=3$ et $d=0$. Matagogo est donc né en 1803.
Et il a donc vécu 110 ans.

Subsidiaire. Réponse **152726**.
De 2000 (année bissextile) à 2016 inclus, il y a eu $(17\times365)+5$ jours soit 6210 jours.
Du 1$^{\text{er}}$ janvier 2017 au 3 juin 2017 inclus, il y a 31+28+31+30+31+3 soit 154 jours.
Au total, cela fait 6364 jours et 6364×24 soit 152736 heures. Il faut enlever les 10 heures du 3 juin (après 14 heures).
Le nombre d'heures cherché est donc 152726.

Trophées Kangourou 2017 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4$^{\text{e}}$ - 3$^{\text{e}}$)

1. Réponse **D.** Si n est le nombre de notes de Lulu avant son 0, et S la somme de ses notes, on a :
$19{,}5=\dfrac{S}{n}$ pour la moyenne de 19,5 et $19=\dfrac{S}{n+1}$ pour la moyenne de 19.
D'où $S=19{,}5\,n = 19\,n+19$. Donc $0{,}5\,n=19$ et $n=38$.

2. Réponse **C.** Chacune des cases centrales (celles avec m ou n, voir figure ci-contre) a 6 voisins dont aucun ne peut lui être consécutif ; parmi les nombres de 1 à 8, chacune ne doit donc avoir qu'un seul nombre qui lui soit consécutif : m et n ne peuvent être que les nombres 1 et 8. Et alors g et d doivent être 7 (à côté de 1) et 2 (à côté de 8). Les nombres y et z sont alors, soit 3 et 5, soit 4 et 6.

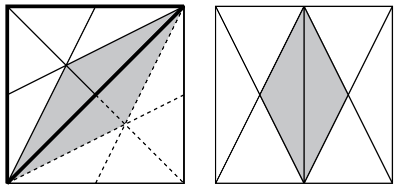


Il n'y a finalement que deux choix successifs possibles : n doit valoir soit 1, soit 8, et x doit alors valoir soit 5 ou 3 (si $n=1$) soit 6 ou 4 (si $n=8$). Cela fait donc 4 possibilités.

3. Réponse **A.** Les nombres carrés sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, …
Les nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, …
Le seul nombre à la fois carré et triangulaire, entre 10 et 100, est 36.
(Remarque : le plus petit nombre supérieur à 36, à la fois carré et triangulaire, est 1225.)

4. Réponse **E.** En appelant x le nombre de dizaines et u le chiffre des unités d'un nombre entier positif, le nombre vaut $10x+u$ et on cherche les nombres tels que $x=\dfrac{1}{12}(10x+u)$, c'est-à-dire $2x=u$.
x ne peut alors être égal qu'à 1, 2, 3 ou 4 (puisque u est au plus égal à 9 et qu'on cherche des nombres entiers strictement positifs). Il y a donc 4 nombres possibles : 12, 24, 36 et 48.

5. Réponse **B.** Sur la première figure, en traçant les diagonales communes du carré et du losange, on fait apparaître le partage d'un triangle (en gras sur la figure) par ses médianes (en six triangles de même aire) : l'aire du demi-losange vaut le tiers de l'aire du demi-carré. Sur la deuxième figure, l'aire du losange vaut clairement le quart de l'aire du carré.



La différence des aires vaut $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{12}$ de l'aire du carré.

L'aire du carré valant 6×6 soit 36 cm^2, la différence cherchée vaut $\frac{36}{12}$ soit 3 cm^2.

6. Réponse **E.** Il y a $36+37$ soit 73 gants, dont la répartition est résumée dans ce tableau :

	blancs	noirs
droits	15	20
gauches	21	17

Si l'on n'a pas de chance, on peut prendre d'abord les 21 gants gauches blancs (les plus nombreux) et, ensuite, tous les gants dépareillés par rapport à ceux-là, soit les gants droits noirs, qui sont 20.
Mais le gant pris ensuite est soit droit blanc soit gauche noir et complète donc une paire.
La réponse est $21+20+1$, soit 42.

7. Réponse **B.** Balthazar dit la vérité au moins un des deux jours (il ne ment que le jour de son anniversaire).
S'il disait la vérité le 6 mai, alors son anniversaire serait le 5 mai ; le 7 mai, il dirait aussi la vérité et répondrait donc « Avant-hier », ce qui n'est pas le cas : donc Balthazar a menti le 6 mai.
Il a donc dit la vérité le 7 mai et son anniversaire est le 6, jour où il a bien menti en répondant « Hier ».

8. Réponse **B.** L'aiguille des minutes fait 360° en 60 min soit 6° en une minute. À 3 h 18, elle fait un angle de $18\times6°$ soit 108° avec la verticale de midi.
L'aiguille des heures fait 360° en 12 h soit 30° en une heure. 3 h 18 c'est 3,3 h (puisque 6 min est un dixième d'heure) donc à 3 h 18, l'aiguille des heures fait un angle de $3{,}3\times30°$ soit 99° avec la verticale de midi.
Et les aiguilles font entre elles un angle de $108°-99°$, soit 9°.

9. Réponse **A.** En plaçant successivement 1 jeton (pour $n=1$), puis 2 jetons (pour $n=2$, puis $n=3$, puis $n=4$, puis $n=5$), puis 4 jetons (pour $n=6$, puis $n=7$, puis $n=8$, puis $n=9$) dans l'ordre indiqué dans les cases, on a bien n jetons par carré 3×3, pour n de 1 à 9.
Il y a bien sûr d'autres manières de placer les jetons pour obtenir une configuration voulue. On peut par exemple remarquer qu'on passe d'une configuration à n jetons à une configuration à $9-n$ jetons en mettant des jetons sur les cases vides et en enlevant les jetons qui étaient déjà placés.

9	8	5	9	8
6	7	4	6	7
2	3	1	2	3
9	8	5	9	8
6	7	4	6	7

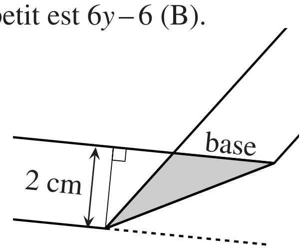
Subsidiaire. Réponse **371601**.
À la suite des observations et calculs de Sosigène d'Alexandrie, le calendrier julien fut institué le 1er janvier de l'an 709 Ab Urbe Condita (depuis la fondation de Rome) : la durée de chacun des douze mois d'une année (365 jours) fut alors fixée et une année sur 4 fut décidée bissextile (avec un jour de plus le 29 février).
À la demande du pape Jean 1er, le moine érudit Denys le Petit proposa, en 1278 AUC (525 de notre ère), que le 1er janvier de l'an 754 AUC devienne le 1er janvier de l'an 1 (la naissance de Jésus étant supposée avoir eu lieu 7 jours avant).
Depuis le concile de Nicée (en 325 de notre ère), la date de Pâques était calculée en fonction de l'équinoxe de printemps (qui tombait alors le 20 ou 21 mars). Pour recaler cette date du printemps en 1582, le pape Grégoire XIII institua le calendrier grégorien : le lendemain du 4 octobre 1582 serait le 15 octobre, et les années multiples de 100, mais non multiple de 400, ne seraient pas bissextiles.

Sans la réforme grégorienne, du 1er janvier 1000 au 31 décembre 1999 inclus, il serait passé $365{,}25\times1000$ jours, soit 365250. La réforme a supprimé 10 jours (en 1582) plus 3 jours (en 1700, 1800 et 1900) : 365237 jours.
Du 1er janvier 2000 au 3 juin 2017 inclus, il s'est passé $(17\times365)+5+(31+28+31+30+31+3)$ jours, soit $6205+5+154$ soit 6364 jours (5 années ont été bissextiles : 2000, 2004, 2008, 2012 et 2016). Au total, 371601 jours.

Trophées Kangourou 2017 - Corrigé de l'épreuve Lycées

1. Réponse **B.** En écrivant chaque fraction avec un même numérateur ($6x$), les dénominateurs sont alors $6y+6$ (A), $6y-6$ (B), $6y+3$ (C), $6y-3$ (D) et $6y+2$ (E). Ces cinq dénominateurs sont strictement positifs et le plus petit est $6y-6$ (B).

2. Réponse **C.** L'aire de la région triangulaire de superposition vaut la largeur de la bande (hauteur) fois la demi-base.
Et cette aire est minimum lorsque cette base est la plus courte, c'est-à-dire lorsque la bande est pliée perpendiculairement à elle-même.
La base mesure alors aussi 2 cm et l'aire vaut alors $\frac{1}{2}\times2\times2$, soit 2 cm^2.



3. Réponse **B.** De la deuxième égalité, on obtient $1+\dfrac{w}{x}=20w$ et $\dfrac{x}{w}+1=20x$. D'où $\dfrac{w}{x}+\dfrac{x}{w}=20(w+x)-2$.
Et on a donc $\dfrac{w}{x}+\dfrac{x}{w}=20\times 101-2=2018$.

4. Réponse **C.** Si le côté du cube augmente de 50 % c'est qu'il est multiplié par 1,5. L'aire d'une face du cube est donc multipliée par $1{,}5^2$ soit 2,25 et elle augmente donc de 125 %. Et l'aire totale du cube (égale à 6 fois l'aire d'une face) augmente aussi de 125%.

5. Réponse **E.** La somme s'écrit $1+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\ldots+(2017^2-2016^2)$.
Comme $(n+1)^2-n^2=2n+1$, elle s'écrit aussi $1+5+9+13+\ldots+4029+4033$.
Cette dernière somme a 1009 termes ($1+2016\div 2$) valant en moyenne 2017 ($2017=\dfrac{4033+1}{2}=\dfrac{4029+5}{2}=\ldots$).
La somme cherchée vaut donc 2017×1009.

6. Réponse **A.** La dernière suite obtenue est la suite des restes de la division par 9 des nombres de 1 à 2017 (sauf pour le reste 0 qui est remplacé par 9). Cette suite est 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9… et a 2017 termes.
Or le reste de la division de 2017 par 9 est 1 ; il y a donc un 1 de plus à la fin.

7. Réponse **B.** P étant le prix d'un diamant de masse M, on a : $P=kM^2$.
Et si M est partagé en M_1 et M_2 (avec $M_1 \geqslant M_2$) : $P_1=kM_1^2$ et $P_2=kM_2^2$. D'où $\dfrac{P_1+P_2}{P}=\dfrac{M_1^2+M_2^2}{M^2}$.
En posant $\dfrac{M_1}{\mathrm{M}}=u$, on a $\dfrac{M_2}{\mathrm{M}}=1-u$ et donc
$\dfrac{3250}{6250}=u^2+(1-u)^2$; $\dfrac{13}{25}=2u^2-2u+1$; ou $u^2-u+\dfrac{6}{25}=0$, qui se factorise en $\left(u-\dfrac{2}{5}\right)\left(u-\dfrac{3}{5}\right)=0$.
Et $M_1=\dfrac{3}{5}\times 300$ g = 180 g ; $M_2=\dfrac{2}{5}\times 300$ g = 120 g.

8. Réponse **B.** La somme $n+(n+1)+\ldots+(n+999)$ de 1000 entiers consécutifs, le premier étant n est $1000n+\dfrac{999\times 1000}{2}$.
Le nombre p cherché vérifie donc $p^2=500(2n+999)=2^2\times 5^3\times(2n+999)$.
$\dfrac{2n+999}{5}$ doit donc être un carré. Comme $\dfrac{2n+999}{5}\geqslant 200$, on cherche le premier carré supérieur à 200 : c'est $225=15^2$.
Dans ce cas, on a $2n+999=5\times 15^2=1125$, $n=63$ et $p=2\times 3\times 5^3=750$.
Et 750 est donc le plus petit entier positif cherché.

9. Réponse **A.** Appelons V ceux qui disent toujours la vérité et M ceux qui mentent.
Les personnes ne participant pas au banquet peuvent tous être des V.
Mais il y a au moins 1000 personnes qui participent au banquet, dont certains M. Pour maximiser le nombre de V on doit donc minimiser le nombre de participants au banquet. Supposons qu'il y ait au moins un V au banquet :
- autour d'un V, il y a un M et un V, on obtient la suite M-V-V ;
- autour de M (puisqu'il ment), il y a deux personnes de la même catégorie ; on a donc V-M-V-V ;
- chaque V ayant comme deux voisins un V et un M, on a donc V-V-M-V-V-M

et ainsi de suite, la suite M-V-V se reproduit périodiquement autour de la table ronde.
Au banquet, donc, 2 personnes sur 3 sont des V et 1 sur 3 des M.
Le minimum de personnes autour de la table est donc le premier multiple de 3 au-dessus de 1000 ; soit 1002. Parmi eux, il y a 334 M et 668 V.
Le maximum de V est obtenu en ayant donc 668 V au banquet et 2017 – 1002, soit 1015 V (si tous ceux qui ne participent pas au banquet sont des V). Cela fait 1015 + 668, soit 1683 véridiques.

Subsidiaire. Réponse **736485.** (Voir subsidiaire Cadets puis ci-dessous.)
Sans la réforme grégorienne, du 1er janvier 1 au 31 décembre 2000, il serait passé $365{,}25\times 2000$ jours, soit 730500. La réforme a supprimé 10 jours (en 1582) plus 3 jours (en 1700, 1800 et 1900) : 730487 jours.
Du 1er janvier 2001 au 3 juin 2017 inclus, il s'est passé $(16\times 365)+4+(31+28+31+30+31+3)$ jours, soit $5840+4+154$ soit 5998 jours.
Au total, 736485 jours.