KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2015

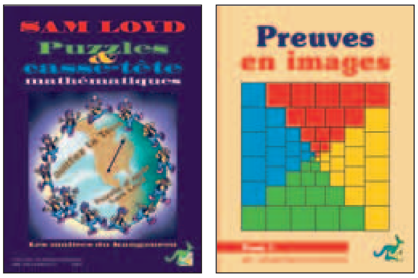
KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en France en 1990 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

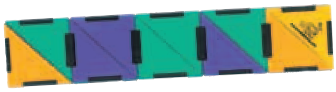
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, trois cent quarante mille élèves (dans les écoles, collèges et lycées), il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

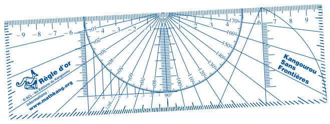
Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 6 millions et demi de participants dans 65 pays (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.math-ksf.org). Le *Kangourou*, d'origine française, est donc le plus grand concours scolaire du monde.

Le Kangourou : des mathématiques pour tous, offertes à tous !
Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !
Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur quatre reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).
Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation au week-end parisien des *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).







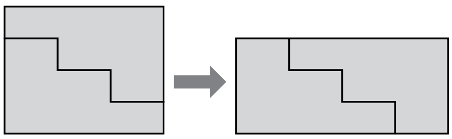
Le Kangourou : des services Internet sur www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou 2016 aura lieu le jeudi 17 mars 2016.

Trophées Kangourou 2015 - Corrigé de l'épreuve Benjamins (6^e - 5^e)

1. Réponse **E.** Un koala a 2×2 pouces à l'avant et 2 pouces à l'arrière, soit 6 pouces. 10 koalas ont donc en tout 60 pouces.

2. Réponse **E.** La découpe « en escalier » puis le décalage d'une « marche » permet de gagner une marche en longueur (ici $40-30$, soit 10 cm) en perdant une hauteur de marche (ici $24-18$, soit 6 cm.) La seule découpe ayant 3 longueurs de 10 cm et 4 hauteurs de 6 cm est celle du dessin E.



3. Réponse **D.** Avec 1 litre, Jim fait $\frac{100}{8}$, soit 12,5 km, Tom fait 13 km, Kim fait $\frac{540}{45}$, soit 12 km.
L'ordre demandé est donc Tom, Jim, Kim.

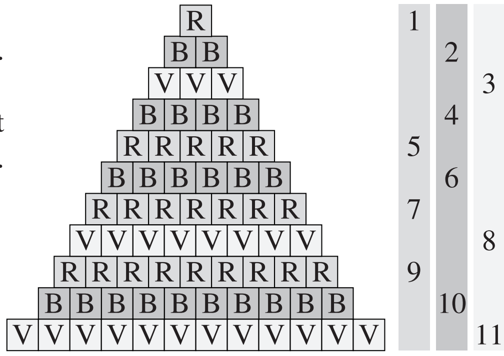
4. Réponse **C.** Si le premier terme est a et le deuxième b, alors le $3^{ème}$ terme est $a+b$, le $4^{ème}$ terme est $a+2b$, le $5^{ème}$ terme est $2a+3b$. On a donc $2a+3b=2015$. Le nombre a est le plus grand possible lorsque b est le plus petit possible. On choisit donc $b=1$, et alors $2a=2012$ et $a=1006$. (Les cinq premiers termes de la suite sont 1006, 1, 1007, 1008, 2015.)

5. Réponse **A.** Les faces avant, gauche et arrière restent attachées et forment une première bande de 3 carrés, à laquelle se rattache l'autre bande de 3 carrés solidaires (faces basse, droite et haute). La seule arête commune aux deux bandes de trois carrés est commune aux faces arrière et basse du cube.

6. Réponse **D.** Devant Valérie, il y a $n-y$ personnes (aux n personnes qui sont devant Julie, on enlève Valérie et les $y-1$ qui sont entre Valérie et Julie). Au total dans la queue, il y a ceux qui sont devant Valérie, Valérie elle-même et ceux qui sont derrière Valérie : cela fait $(n-y)+1+x$ personnes qu'on peut écrire $n+x-y+1$.

7. Réponse **B.** La somme des périmètres des rectangles vaut 8 fois le côté du carré initial ; en effet ce côté est compté, par morceaux, 4 fois horizontalement (1+2+1 fois) et 4 fois verticalement (1+2+1 fois).
Le carré initial a donc un côté égal à $\frac{96\text{ cm}}{8}$, soit 12 cm ; et son aire vaut 144 cm^2.

8. Réponse **A.** Il y a en tout 66 cubes, soit 22 de chaque couleur.
La pyramide a une base de 11 cubes car $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$.
Il reste à placer 21 cubes rouges, 20 cubes bleus et 19 cubes verts.
Pour les verts, il faut faire 19 en ajoutant des nombres pris parmi 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11. Si on ne veut pas prendre deux entiers consécutifs, on ne peut que prendre 11 et 8.
Pour les bleus, il faut faire 20 en ajoutant des nombres pris parmi 4, 5, 6, 7, 9 et 10. Si on ne veut pas prendre deux entiers consécutifs ni laisser deux entiers consécutifs, on ne peut que prendre 10, 6 et 4.
Et alors les étages rouges sont les étages 1, 5, 7 et 9.
Il n'y a donc qu'une configuration possible et le septième étage est rouge.



9. Réponse **E.** Le nombre n qui nous intéresse est le résultat de la division par 5 d'un nombre qui ne comporte que des chiffres 5 et 6 (et se termine par un 5). Cette division produit au quotient ou bien des 1, quand il n'y avait pas de reste antérieur (en 6 combien de fois 5, ou en 5 combien de fois 5 : une fois) ou bien des 3 quand il y avait un reste issu du chiffre précédent (en 16 combien de fois 5, ou en 15 combien de fois 5 : 3 fois). Or un reste 1 se produit lorsque le chiffre précédent du diviseur était un 6. Les restes 1 étant produits par les 6, il y en aura 503 dans la division et le quotient n comportera 503 chiffres 3 et 503 chiffres 1.
La somme des chiffres de n est donc $503\times1 + 503\times3 = 2012$; celle des chiffres de $n+5$ est 2017.

Subsidiaire. Réponse **1 010 000.**
Si les lignes sont écrites de 100 à 1 au lieu de l'être de 1 à 100, on obtient les mêmes résultats mais alors (voir figure ci-contre), sur la diagonale de la table, les 100 résultats sont tous égaux à 101. De plus, les deux nombres écrits symétriquement de chaque côté de cette diagonale ont pour somme 202 et donc pour moyenne 101.
Ainsi la moyenne de tous les résultats (100×100 nombres) écrits est 101 et la somme de tous ces résultats est donc $101\times10\,000=1\,010\,000$.

+	1	2	3	4	…
100	101	102	103	104	
99	100	101	102	103	
98	99	100	101	102	
97	98	99	100	101	
⋮					

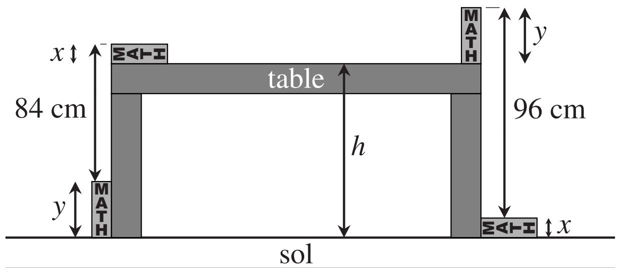
Trophées Kangourou 2015 - Corrigé de l'épreuve Cadets (4^e - 3^e)

1. Réponse **D.** Les soustractions à faire sont : $7-6=1$ (A) ; $8-7=1$ (B) ; $9-8=1$ (C) ; $0-9=-9$ (D) ; $1-0=1$ (E).
Le plus petit résultat est -9.

2. Réponse **D.** On peut multiplier par 3 puis par 99 plutôt que par 33 puis 9 :
$256\times3=768$. Et $768\times99=76800-768$ dont la différence à 76000 est inférieure à 100.

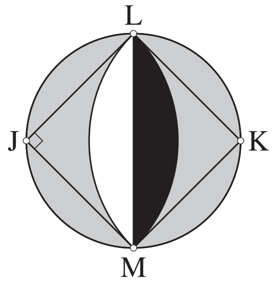
3. Réponse **A.** Comme $x\in\,]0\,;1[$, on a $x>x^2>x^3>x^4$.
x^2+x, somme des deux plus grandes valeurs de la suite de puissances ci-dessus, est donc supérieur à toutes les autres propositions.

4. Réponse **C.** Soient x l'épaisseur d'un livre, y sa hauteur et h la hauteur de la table (en cm).
On a : $h=84+y-x$ et $h=96+x-y$.
D'où $2h=84+96=180$ et $h=90$.



5. Réponse **B.** $x=1-\frac{1}{111111}$; $y=1-\frac{2}{222223}$; $z=1-\frac{3}{333334}$.
$\frac{1}{111111}=\frac{2}{222222}=\frac{3}{333333}$ donc $\frac{1}{111111}>\frac{2}{222223}$ et $\frac{1}{111111}>\frac{3}{333334}$. x est donc le plus petit des 3 nombres.
$\frac{2}{222223}=\frac{6}{666669}$ est plus petit que $\frac{3}{333334}=\frac{6}{666668}$ donc $y>z$. Finalement : $x<z<y$.

6. Réponse **C.** Si $x=2$ alors $\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{3}$. Si $x=\frac{1}{3}$ alors $\frac{x-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$. Si $x=-\frac{1}{2}$ alors $\frac{x-1}{x+1}=-3$. Si $x=-3$ alors $\frac{x-1}{x+1}=2$.
Après 4 appuis sur la touche H, le nombre affiché est de nouveau 2. Comme $2012=503\times4$: après 2012 appuis, le nombre affiché est 2. Et après 2015 appuis, le nombre affiché est donc -3.



7. Réponse **D.** Le rayon du cercle de diamètre [JK] étant 1 cm, JLKM est un carré de côté $\mathrm{JL} = \sqrt{2}$ cm.
L'aire du triangle JLM est 1 cm^2 et l'aire du quart de disque de centre J et d'arc $\overset{\frown}{\mathrm{LM}}$ est $\frac{1}{4} \times \pi \times 2$, soit $\frac{\pi}{2}$ cm^2. L'aire en noir sur le dessin ci-contre vaut donc $\frac{\pi}{2} - 1$ cm^2.
Et l'aire totale grisée vaut $\pi - 2 \times \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, soit 2 cm^2.

8. Réponse **D.** Dans la liste 1 2 3 4 5 6 … n … 95 96 (96 numéros), on supprime les pairs ; la liste devient alors :
1 3 5 7 9 … $2n+1$ … 93 95 (48 numéros), et on continue à compter…
97 98 99 … … … … … … 144 (nombres prononcés au deuxième tour).
On supprime les numéros correspondant aux nombres pairs prononcés ; la liste devient alors :
1 5 9 … $4n+1$ … 89 93 (24 numéros)…
145 146 147 … … … … 167 168 (nombres prononcés).
On supprime les numéros correspondant aux nombres pairs prononcés ; la liste devient alors :
1 9 17 … $8n+1$ … 81 89 (12 numéros)
169 170 171 … … … 179 180 (nombres prononcés).
On supprime les numéros correspondant aux nombres pairs prononcés ; la liste devient alors :
1 17 33 49 65 81 (6 numéros) puis 1 33 65 (3 numéros) puis 1 65 (2 numéros)
181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191.
Celui qui a dit 1 au premier tour dit 190 et se retire. Celui qui reste a donc prononcé 65 au premier tour.

9. Réponse **D.** La somme de la première ligne vaut 30 et la somme de la deuxième diagonale vaut 39. Les dix sommes consécutives sont donc les nombres de 30 à 39.
On doit placer les nombres 1, 2, 8, 15 et 16.
La somme des trois nombres déjà écrits sur la première diagonale valant 26, le quatrième nombre ne peut-être que 8 (avec 1, 2, 15 ou 16 la somme serait inférieure à 30 ou supérieure à 39).
Pour la deuxième ligne et la troisième colonne, les sommes des trois nombres déjà écrits valent respectivement 22 et 19 ; ces lignes ne peuvent pas être complétées par 1 ou 2 (trop petits) donc le sont par 15 et 16. Mais 15 ne peut pas compléter la troisième colonne car 34 est déjà la somme de la première diagonale ; c'est donc 16 qui complète cette colonne et 15 qui complète la deuxième ligne et figure dans la case grisée. Le carré se complète alors d'une seule manière, indiquée ci-contre.

				↗ 39
4	5	7	14	→ 30
6	13	3	15	→ 37
11	12	9	1	→ 33
10	2	16	8	→ 36
↓ 31	↓ 32	↓ 35	↓ 38	↘ 34

Subsidiaire. Réponse **24 492 500**
On peut obtenir la table de l'opération ★ en soustrayant chaque résultat de la table d'addition du résultat correspondant dans la table de multiplication.
Le total des résultats dans la table d'addition des entiers de 1 à 100 est 1 010 000 (voir subsidiaire de l'épreuve 6^{e}-5^{e}).
La somme des nombres figurant dans la première ligne de la table de multiplication des entiers de 1 à 100 est : $1+2+3+\ldots\ldots+100$.
Une manière de calculer cette somme est de l'écrire une deuxième fois dans l'ordre inverse et de faire les sommes des paires de termes placés en même position : $(1+2+\ldots+100)+(100+99+\ldots+1)=(1+100)+(2+99)+\ldots+(100+1)=101\times 100$.
Et donc $1+2+3+\ldots\ldots+100 = 101 \times 50 = 5050$.
La somme des nombres de la 2ème ligne de la table de multiplication est $2\times(1+2+\ldots+100)$, de la 3ème ligne $3\times(1+2+\ldots+100)$, de la 100ème ligne $100\times(1+2+\ldots+100)$. La somme de tous les résultats de la table est donc $(1+2+\ldots+100)\times(1+2+\ldots+100)$ et vaut 5050^2 soit 25 502 500.
Le total de tous les résultats de la table de ★ est égal au total des résultats de la table d'addition ôté du total des résultats de la table de multiplication, il est donc égal à 25 502 500 – 1 010 000, soit 24 492 500.

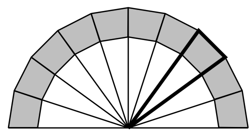
Trophées Kangourou 2015w - Corrigé de l'épreuve Lycées

1. Réponse **D.** Soient P, N, G et F les quatre notes. On a : $\mathrm{P}+\mathrm{N}+\mathrm{G}+\mathrm{F}=4\times 16=64$; $\mathrm{P}+\mathrm{N}=32$; $\mathrm{N}+\mathrm{F}=36$; $\mathrm{F}+\mathrm{P}=26$.
Sommons, membre à membre, les trois dernières égalités : $2(\mathrm{P}+\mathrm{N}+\mathrm{F})=94$. D'où $\mathrm{G}=64-47=17$.
Notez que $\mathrm{P}=11$, $\mathrm{F}=15$ et $\mathrm{N}=21$ (une note n'est pas nécessairement inférieure à 20).

2. Réponse **E.** Après une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la courbe d'équation $y=x^2-6x+11$ devient celle d'équation $y=x^2+6x+11$. Et après une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, la courbe d'équation $y=x^2+6x+11$ devient celle d'équation $y=-x^2-6x-11$.

3. Réponse **E.** Appelons a le côté du cube (en cm). On a : $12a=x$ et $6a^2=x$. Donc $6a^2=12a$ et $a=2$. Le volume du cube vaut $2\times 2\times 2$, soit 8 (en cm^3).

4. Réponse **C.** Tous les prolongements des joints entre pierres passent par le centre commun des cercles dans lesquels s'inscrivent les deux demi-icosagones.



L'angle au centre interceptant chaque trapèze vaut $\dfrac{180°}{10}$, soit 18°.

Dans le triangle tracé en traits épais, chacun des angles à la base vaut $\dfrac{180°-18°}{2}$ soit 81°.

Chaque trapèze a donc deux angles de 81° et deux de 99°. (*Remarque* : la deuxième phrase de l'énoncé ne sert pas pour ce calcul).

5. Réponse **C.** La largeur de la partie commune est $2-\sqrt{2}$ et sa longueur est $2\sqrt{2}-2$.
Son aire est alors $(2-\sqrt{2})\times(2\sqrt{2}-2) = 2(2\sqrt{2}-2-2+\sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2}-4)$.

6. Réponse **E.** Il y a 8 cas possibles concernant le fait que chaque valet ait mangé des tartes (T, C ou P) ou non (t, c ou p). Cependant P et C jouant des rôles symétriques, le nombre de cas se réduit à 6. Ils sont en lignes dans le tableau ci-contre, pour lesquels les colonnes indiquent, pour chaque cas, la vérité de chaque phrase A, B, C, D, E. Ce tableau se remplit rapidement par colonne.

	A	B	C	D	E
TCP		vrai			vrai
TcP ou TCp		vrai		vrai	vrai
Tcp		vrai	vrai	vrai	
tCP					vrai
tcP ou tCp			vrai	vrai	
tcp	vrai			vrai	

Une seule des phrases est vraie ; on est donc dans le cas de la quatrième ligne (les valets de Carreau et de Pique ont mangé des tartes mais pas le valet de Trèfle) ; et c'est la phrase E qui est la seule vraie.

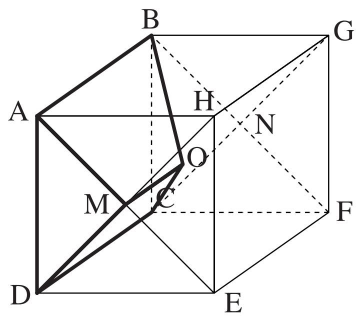
7. Réponse **D.** Si N a n chiffres, le nombre obtenu en écrivant un 1 devant vaut 10^n+N. Et celui obtenu en écrivant un 1 derrière est $10N+1$. L'énoncé dit que $3(10^n+N)=10N+1$, soit $3\times10^n-1=7N$. Le nombre $3\times10^n-1$ est donc divisible par 7.

Posons la division :

$$\begin{array}{l|l}
2\,9\,9\,9\,9\,9\,9\ldots & 7 \\ \hline
\;\,1\,9 & 428571\ldots \\
\quad\;\,5\,9 & \\
\qquad\;\,3\,9 & \\
\qquad\quad\;\,4\,9 & \\
\qquad\qquad\;\,0\,9 & \\
\qquad\qquad\quad\;\,2\ldots &
\end{array}$$

Les restes 2, 1, 5, 3, 4 et 0 se répètent alors tous les 6 chiffres.
Le reste 0 arrive donc pour $n=5$, pour $n=11$, pour $n=17$… autrement dit pour $n=5+6k$, $k\in\mathbb{N}$.
Et comme on cherche des nombres N de moins de 100 chiffres, on doit avoir $n\leqslant100$. Il y a 16 valeurs de k qui conviennent (de 0 à 15) et donc 16 nombres N de moins de 100 chiffres.
(Remarque : la plus petite valeur de N est 42857 avec $7\times42\,857=299\,999$.)

8. Réponse **A.** Appelons N le centre de la face BCFG.
Le solide S est exactement le prisme ADMNBC diminué du tétraèdre NBCO.



Le prisme a pour volume $\dfrac{1}{4}$.

Le tétraèdre (de base BNC et de sommet O) a pour volume $\dfrac{1}{3}\times\text{aire(BNC)}\times\text{NO}$

soit $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{24}$.

Le volume de S est donc égal à $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{24}$, soit $\dfrac{5}{24}$.

9. Réponse **B.** Soit P le point situé à l'intérieur de 80 segments. Si on nomme a le nombre de points situés d'un côté de P et b le nombre de points situés de l'autre, le nombre de segments contenant P est ab et on a : $ab=80$ et $a+b+1=n$.
Soit Q le point situé à l'intérieur de 90 segments. Si on nomme c le nombre de points situés d'un côté de Q et d le nombre de points situés de l'autre, le nombre de segments contenant Q est cd et on a : $cd=90$ et $c+d+1=n$.
$80=2^4\times5$ et a 10 diviseurs : 1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 20, 40, 80. $90=2\times3^2\times5$ et a 12 diviseurs : 1, 3, 9, 2, 6, 18, 5, 15, 45, 10, 30, 90.
Les 5 triplets $(a\,;b\,;n)$ possibles ($a\geqslant b$) sont (1 ; 80 ; 82), (2 ; 40 ; 43), (4 ; 20 ; 25), (5 ; 16 ; 22), (8 ; 10 ; 19).
Les 6 triplets $(c\,;d\,;n)$ possibles ($c\geqslant d$) sont (1 ; 90 ; 92), (2 ; 45 ; 48), (3 ; 30 ; 34), (5 ; 18 ; 24), (6 ; 15 ; 22), (9 ; 10 ; 20).
Le seul n possible (commun aux deux listes) est donc 22.

Subsidiaire. Réponse **1229.**
On lit sur une table de nombres premiers que le nombre de nombres premiers inférieurs à 10000 est 1229. Pour approcher ce nombre, on peut savoir, d'une part que le nombre de nombres premiers inférieurs à k devient proche, lorsque k est très grand, de $\dfrac{k}{\ln k}$, d'autre part que $\ln10\approx2{,}3$ et donc que $\ln100\approx4{,}6$ et $\ln10000\approx9{,}2$; d'où $\dfrac{100}{\ln100}\approx21{,}7$ et $\dfrac{10\,000}{\ln 10\,000}\approx1087$.
Or il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100, soit environ 15% de plus que l'approximation pour k grand ; estimant que l'erreur d'approximation devrait aller en décroissant, la valeur pour 10000 serait un peu inférieure à 1087 augmenté de 15%, soit 1250. Il pouvait donc être « raisonnable » de parier entre 1200 et 1240…