KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

LES TROPHÉES KANGOUROU 2009

KANGOUROU [kãguru] n.m.
Jeu de mathématiques créé en 1991 sur le modèle du concours national australien (d'où son nom).

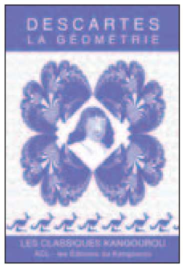
Il comporte 24 questions à choix multiple de difficulté croissante, proposées le même jour dans tous les établissements scolaires. Intéressant, en France, plus de trois cents mille élèves, il est assorti d'une distribution massive de documentation mathématique, apportant à tous les élèves, à la fois, culture, amusement et connaissance.

Il a été étendu à toute l'Europe et ailleurs et réunit maintenant plus de 5 millions de participants dans le monde (voir le site *Kangourou Sans Frontières* : www.math-ksf.org).

Le *Kangourou* est, depuis dix-huit ans, le jeu-concours préféré des élèves (et des professeurs) français dans les lycées, les collèges et les écoles.

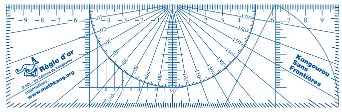
Le *Kangourou* souhaite aussi accompagner l'éducation et les progrès des élèves les plus doués. Dans cet esprit, les *Trophées Kangourou* consacrent chaque année de *jeunes talents mathématiques* parmi les meilleurs de leur classe d'âge.

Le Kangourou : des mathématiques pour tous, envoyées à tous !

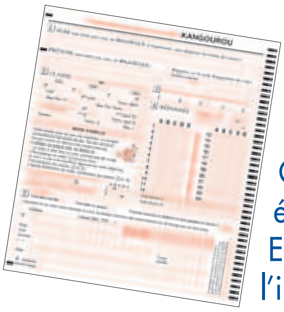


Chaque élève reçoit en effet :
- les ***Malices du Kangourou*** (un magazine de 32 pages de mathématiques) ou un ***Classique Kangourou*** ;
- les sujets du jeu-concours ;
- un objet didactique (par exemple : une règle d'or).

Participer au Kangourou, c'est surtout et toujours faire et lire des mathématiques ludiques, intéressantes, utiles et porteuses de culture !



Le Kangourou : un jeu ET un concours...



Chaque année, le Kangourou reste la grande fête des mathématiques, où l'on est heureux de participer, quelque soit son niveau, comme dans les grands marathons populaires. Et le Kangourou reste aussi le premier concours national qui permet aux meilleurs de se mesurer et de se comparer avec tous les autres.

Outre les prix pour tous, de nombreux prix sont distribués dans les établissements scolaires (un élève sur cinq reçoit un cadeau supplémentaire dans chaque établissement).

Et les meilleur(e)s sont récompensés par des médailles (or, argent, bronze), des lots spéciaux, l'invitation au week-end parisien des *Trophées Kangourou* et des voyages en Europe (pour les collégiens et lycéens).

Le Kangourou : des services Internet.

Le Kangourou a toujours utilisé les nouvelles technologies pour sa communication et ses productions. Aujourd'hui les possibilités d'Internet sont pleinement exploitées. En particulier :
- les inscriptions et leur suivi possibles sur internet,
- les résultats complets, avec édition électronique des diplômes,
- les annales complètes répertoriées, sélectionnables, et téléchargeables.

>>> Corrigés des épreuves des Trophées Kangourou >>>

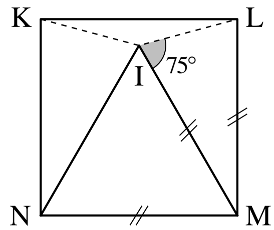
1. Réponse **E.** 50% c'est la moitié, et 200% c'est le double.

2. Réponse **D.** Sur le dé A, le 1 est opposé au 2. Sur le dé B, le 3 est opposé au 5. Sur le dé C, le 4 est opposé au 6. Sur le dé E, le 4 est opposé au 6. Le dé D est bon.

3. Réponse **D.** $3 \times 2009 = 6027$. La somme des trois nombres est 6027.
$6027 - 9 = 6018$.

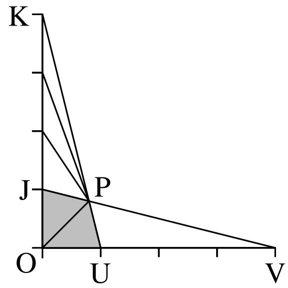
4. Réponse **A.** Les seuls mois particuliers sont les mois de 29 jours, c'est-à-dire les mois de février des années bissextiles. Entre 2009 et 2029, il y a 5 années bissextiles (2012, 2016, 2020, 2024 et 2028).

5. Réponse **E.** Si MIN est équilatéral, alors, dans le triangle LIM, isocèle en M, l'angle en M vaut 30° ($90° - 60°$) ;
et donc les angles en L et I valent chacun 75° (la moitié de $180° - 30°$).
Autour de I, on a donc des angles de 75°, 60°, 75° et
$360° - 75° - 60° - 75°$, soit 150°.
$\widehat{KIL} = 150°$.



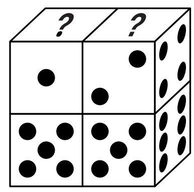
6. Réponse **B.** 100 s'écrit comme produit de cent facteurs avec :
- 2 facteurs autres que 1 et 98 fois le facteur 1,
  les découpages de 100 en produits de 2 facteurs sont 50×2, 25×4, 20×5 et 10×10,
  la somme des facteurs est la plus petite pour 10×10 et vaut $20 + 98 = 118$;
- 3 facteurs autres que 1 et 97 fois le facteur 1,
  les découpages de 100 en produits de 3 facteurs sont $2 \times 2 \times 25$, $5 \times 10 \times 25$, $4 \times 5 \times 5$ et $2 \times 5 \times 10$,
  la somme des facteurs est la plus petite pour $4 \times 5 \times 5$ et vaut $14 + 97 = 111$;
- 4 facteurs autres que 1 et 96 fois le facteur 1,
  le seul découpage de 100 en produits de 4 facteurs différents de 1 est $2 \times 5 \times 2 \times 5$,
  la somme des facteurs vaut alors $14 + 96 = 110$; c'est la plus petite !

7. Réponse **D.** Le triangle OKP peut se diviser en 4 triangles de sommet P et d'aires égales (ils ont même hauteur et même base, égale à OJ).
OJP est un de ces triangles et a même aire que OUP, son symétrique par rapport à (OP).
Le triangle OKU peut donc se diviser en 5 triangles d'aires égales et le quadrilatère OJPU est formé de 2 de ces triangles.
L'aire du quadrilatère OJPU est deux cinquièmes de l'aire du triangle OKU.



8. Réponse **D.** Le calcul 1 est faux : le dernier chiffre du résultat devrait être pair.
Le calcul 3 est faux : le produit cherché dépasse (de beaucoup) $10 \times 1000 \times 1000 \times 10000$, soit 1 suivi de 11 zéros ; le résultat proposé, qui n'a que 11 chiffres, est donc trop petit pour être juste.
La réponse « les égalités 1, 2 et 3 sont toutes fausses » n'étant pas proposée, c'est que la bonne réponse est « la 1 et la 3 sont fausses ». (On peut d'ailleurs vérifier que le résultat du calcul 2 est juste.)

9. Réponse **D.** Dans les faces accolées des deux dés du bas, l'une des faces vaut 1 (en face du 6) donc la somme commune des points sur deux faces accolées est au plus égale à 7.
Sur le dé en bas à droite, la face supérieure est 3 ou 4. Et sur le dé en haut à droite, la face inférieure est 1 ou 6 ; c'est donc 1, sinon la somme de ces deux faces accolées dépasserait 7.
Donc la face marquée d'un point d'interrogation du dé en haut à droite est 6.
Les dés étant identiques, le dé en bas à droite a donc 4 sur le haut et la somme commune est égale à 5.
Pour les dés du haut, les faces accolées sont donc 3 (dé de droite) et 2 (dé de gauche). Et, les dés étant identiques, la face marquée d'un point d'interrogation du dé en haut à gauche est 3.
$3 + 6 = 9$. La somme cherchée est 9.



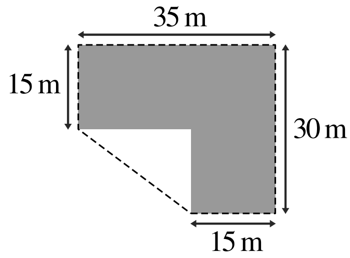
Subsidiaire. Réponse **927.** Voir question subsidiaire Cadets ci contre.

Trophées Kangourou 2009 - Corrigé de l'épreuve Cadets

1. Réponse **D.** $2009 - 1999 = 10$. L'aire grisée mesure $10 \times 10 + 2 \times (1999 \times 10) = 40080$.
Ou bien : l'aire grisée mesure $2009^2 - 1999^2 = 4008 \times 10 = 40080$.

2. Réponse **D.** Les milieux des arêtes (12), les centres des faces (6) et le centre du cube (1) définissent 19 milieux.

3. Réponse **C.** Le « raccourci » est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés de l'angle droit égaux à 3×5 m et 4×5 m : elle mesure 5×5m, soit 25 m.
La distance minimum parcourue par Bastien est, en mètres,
$15 + 35 + 30 + 15 + 25$, soit 120.
Sa vitesse maximum étant 4 mètres par seconde, $\dfrac{120}{4} = 30$,
le temps minimum qu'il peut mettre est 30 s.



4. Réponse **D.** Janvier a $4 \times 7 + 3$ jours. Les trois premiers jours ne contiennent ni mardi, ni samedi (sinon, il y en aurait 5 dans le mois). Cela ne se produit que si le 1er janvier est un mercredi. Et le 9 est donc un jeudi.

5. Réponse **C.** $h = 2^{25}$ et $m = (2^3)^8 = 2^{24}$; donc $m < h$. $m = (2^2)^{12} = 4^{12}$, d'où $m > 3^{12}$ et $u = 3^{11}$; donc $u < m$.
Finalement $u < m < h$.

6. Réponse **B.** On appelle x, y et z les arêtes du pavé de manière que : $xy = 3{,}75$; $yz = 4{,}8$ et $zx = 8$.
On a donc $(xyz)^2 = 3{,}75 \times 4{,}8 \times 8 = 144$. $xyz = 12$. Le volume du pavé est 12 m^3.

7. Réponse **D.** Voir question Benjamins 9.

8. Réponse **C.** N est divisible par 45, donc par 3. Le plus petit diviseur de N (excepté 1) vaut donc soit 3, soit 2. Si c'est 3, le plus grand diviseur vaut 135 (et N vaut 405) ; et, si c'est 2, il vaut 90 (et N vaut 180). Deux nombres satisfont donc cette condition.

9. Réponse **B.** $44 \times 44 = 1936$. 44 est trop petit pour être le côté du carré initial, puisque, même en le découpant en carrés unités, on en a moins de 2009.
$45 \times 45 = 2025$. Cela fait 16 petits carrés de trop si on effectue un découpage en carrés unités. En groupant 9 carrés unités en un seul (de côté 3), on diminue le nombre de carrés de 8. Il suffit de faire deux fois ce regroupement.
On peut donc découper le carré de 45×45 en 2 carrés 3×3 et 2007 carrés 1×1.

Subsidiaire. Réponse **927.**
• Les 99 premiers nombres s'écrivent avec deux chiffres au plus.
• Dans les nombres de 100 à 999 : ceux qui utilisent 3 chiffres sont $9 \times 9 \times 8$ (le premier ne pouvant être 0), soit 648.
Les autres (utilisant donc 1 ou 2 chiffres sont donc $900 - 648$, soit 252.

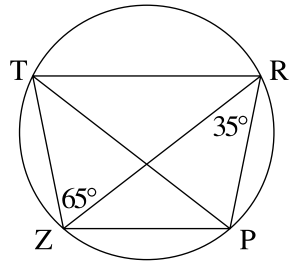
(On peut retrouver ce nombre en additionnant :
- ceux qui n'utilisent qu'un seul chiffre, ils sont 9 ;
- ceux qui utilisent 2 chiffres dont le « 0 » sont du type x00, x0x ou xx0, et il y en a donc $9 + 9 + 9$, soit 27 ;
- ceux qui utilisent 2 chiffres sans le « 0 » sont $9 \times 8 \times 3$ (9×8 pour le choix des deux chiffres différents non nuls, et 3 pour la place de celui qui figure une fois, l'autre y figurant deux fois), soit 216 ;
au total $9 + 27 + 216 = 252$.)

• Dans les nombres de 1000 à 9999 :
- ceux qui n'utilisent qu'un seul chiffre sont 9 ;
- ceux qui utilisent 2 chiffres dont le « 0 » sont du type x0xx, x00x, x000, x0x0, xx0x, xx00, xxx0 et il y en a donc 9×7, soit 63 ;
- ceux qui utilisent 2 chiffres sans le « 0 » sont soit du type *chaque chiffre 2 fois*, et il y en a $\frac{1}{2} \times 6 \times (9 \times 8)$, soit 216,
soit du type *un chiffre 1 fois et un chiffre 3 fois*, et il y en a $4 \times (9 \times 8)$, soit 288,
au total $9 + 63 + 216 + 288$, soit 576.
• Finalement, il y a $99 + 252 + 576$, soit 927 nombres strictement inférieurs à 10000 dont l'écriture utilise deux chiffres au plus.
On peut vérifier que 4536 nombres utilisent exactement 4 chiffres ($9 \times 9 \times 8 \times 7$) et, comme $927 + 4536 + 4536 = 9999$, curieusement, 4536 aussi utilisent exactement 3 chiffres !

1. Réponse **B.** Tous les sommets d'un octaèdre sont adjacents à 4 triangles équilatéraux. Dans le patron B, l'un des deux sommets du haut devrait se refermer autour d'un sommet adjacent à plus de 4 triangles.

2. Réponse **A.** L'élévation à une puissance (supérieure à 10) grandit bien plus que l'ajout d'un chiffre (qui multiplie par un petit peu plus de 10).
Si on veut une démonstration plus précise : $9^{9999} > (9^{10})^{999} > 100^{999} > 99^{999}$ et ainsi de suite…

3. Réponse **B.** Dans le triangle TRZ, l'angle $\widehat{ZTR}$ vaut $180° - 65° - \widehat{TRZ}$.

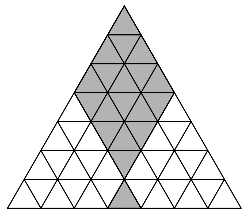


Or $\widehat{TRZ} = \widehat{TRP} - \widehat{ZRP} = \widehat{ZTR} - 35°$, puisque les angles $\widehat{ZTR}$ et $\widehat{TRP}$ sont égaux (ils interceptent le même arc).

Donc $\widehat{ZTR} = 180° - 65° - (\widehat{ZTR} - 35°)$. $2\times \widehat{ZTR} = 150°$. $\widehat{ZTR} = 75°$.

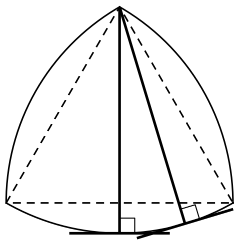
4. Réponse **B.** $(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\ldots\ldots(n^2-1) = (3)\times(2\times4)\times(3\times5)\ldots\ldots\times((n-1)(n+1))$
On multiple successivement les termes du produit : $(3)\times(2\times4)\times(3\times5)\times(4\times6)\times(5\times7)\times(6\times8)\times(7\times9)\times\ldots$
Pour $n < 8$, on voit facilement que certains facteurs premiers ne sont pas au carré.
Et pour $n = 8$, on obtient un carré parfait : $2^{10}\times3^6\times5^2\times7^2$.

5. Réponse **C.** Les deux triangles équilatéraux formant le losange (d'aire 18) sont constitués chacun de $1+3+5$ petits triangles (voir figure).
Le grand triangle a alors un côté égal à 7 fois le petit $(3+3+1)$.



Son aire vaut donc 49, et celle de chaque trapèze : $\dfrac{49-18-1}{2}$, soit 15.

6. Réponse **A.**



La perpendiculaire au sol, au point de contact, passe toujours par le sommet opposé du triangle et la distance entre ce point et le sommet est toujours égale au côté du triangle équilatéral. Le « diamètre » du discobidule est constant.

Il s'agit d'un objet connu sous le nom de triangle de Reuleaux (et qui a servi de prototype pour des moteurs rotatifs).

7. Réponse **D.** Voir question Benjamins 9.

8. Réponse **D.** Ali rattrape Bob au bout de 8 minutes, soit après avoir fait 2 tours et $\dfrac{2}{3}$.

Bob avait alors fait 1 tour et $\dfrac{2}{3}$, soit $\dfrac{5}{3}$ de tour en 8 minutes.

Bob fait donc un tour en $8\times\dfrac{3}{5}$ minutes, soit 4 min 48 s.

9. Réponse **B.** Soit N le nombre de problèmes.
Le plus petit nombre de problèmes posés est alors au moins égal à la somme des nombres de « + » et des nombres de « ≈ ». Le minimum de cette somme peut être 0 [avec (0,0), soit 1 résultat], 1 [avec (0,1) et (1,0), soit 2 résultats] , 2 [avec (2,0) (1,1) et (0,2), soit 3 résultats], …, N [avec N+1 résultats]. Il se trouve que 55 est exactement la somme des 10 premiers entiers. (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10). Et alors N+1 vaut 10 et le minimum de problèmes possibles est donc 9.

Subsidiaire. Réponse **927.** Voir question subsidiaire Cadets.