

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)

Tél. : 01 43 31 40 30

www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant (hors années de pandémie) et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 80 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques, qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2021 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse C. $40^2 = 1600$ et $45^2 = 2025$. La fonction « racine carrée » n'est pas linéaire mais $\sqrt{2021}$ est beaucoup, beaucoup, plus proche de 45 que de 40 ! Remarque : on a, à partir de l'égalité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $45 - \sqrt{2021} = \frac{4}{45 + \sqrt{2021}}$, d'où $45 - \sqrt{2021} < \frac{4}{45} < 0,1$.

2. Réponse D. Chaque pavé obtenu a deux faces carrées d'1 cm² (une face du cube initial et la face opposée créée par la découpe) et 4 demi-faces de cube. Cela fait une aire totale de $(2 \times 1) + (4 \times 0,5)$, soit 4 cm².

3. Réponse E. Seules les représentations C et E ont la bonne succession de variations. Et E est la bonne réponse car la pénultième valeur (-3°) est plus proche de la dernière que de l'antépénultième.

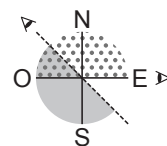
4. Réponse E. L'aire du disque inscrit dans un carré de côté c , donc d'aire c^2 , est $\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Ainsi, dans chaque carré de la figure, l'aire du disque est $\frac{\pi}{4}$ fois celle du carré. Et, pour le rectangle, réunion des six carrés, la proportion de son aire qui est grisée est donc aussi $\frac{\pi}{4}$.

5. Réponse C. Les diviseurs de 24 étant 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, la proportion de nombres impairs parmi eux est $2/8$, soit $1/4$. C'est la probabilité cherchée.

6. Réponse A. La figure ci-contre est centrée sur le pied de l'obélisque.

Vu du Nord-Ouest, la pointe, à droite du pied, est dans la partie grisée. Vu de l'Est, la pointe, à droite du pied, est dans la partie pointée.

Seule l'image A montre la pointe dans le secteur commun aux deux zones.



7. Réponse **E**. On a $0 < x < 1$. Donc x^2, x^3 et x^4 sont strictement inférieurs à x et \sqrt{x} est strictement supérieur à x .

8. Réponse **C**. Le critère de divisibilité par 3 (la somme des chiffres est divisible par 3) donne :

- 3 nombres avec trois fois le même chiffre, 111, 333, 555 ;
 - aucun nombre si les chiffres sont $\{1, 1, 3\}, \{1, 1, 5\}, \{3, 3, 1\}, \{3, 3, 5\}, \{5, 5, 1\}$ ou $\{5, 5, 3\}$;
 - 6 nombres, obtenus par permutation, si les chiffres sont $\{1, 3, 5\}$: 135, 153, 315, 351, 513 et 531.
- Ce qui fait 9 nombres au total.

9. Réponse **C**. Le triangle a un côté parallèle à l'axe des x , de sommets (p, q) et $(3p, q)$, et donc de longueur $3p - p$, soit $2p$.

La hauteur correspondante est égale à $3q - q$, soit $2q$.

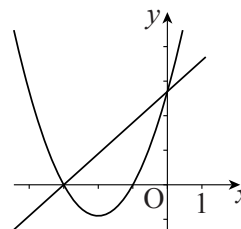
L'aire du triangle est donc $\frac{1}{2} \times 2p \times 2q$, soit $2pq$.

10. Réponse **D**. La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0; c)$. La droite les coupe au même point ; ce qui exclut les réponses B, C et E (car a, b et c sont distincts).

Si l'équation de la droite était $y = bx + c$ (réponse A), alors tout point $(x; y)$ d'intersection de la droite avec la parabole vérifierait $ax^2 = 0$. Et comme $a \neq 0$, il n'y aurait qu'un seul point d'intersection $(0; c)$, ce qui n'est pas le cas. La seule équation pouvant être celle de la droite est donc la D : $y = ax + c$.

Nous avons répondu à la question ; donnons cependant quelques précisions si l'équation de la droite est $y = ax + c$.

- Le 2^e point d'intersection est alors $(-\frac{c}{a}; 0)$.
- (-1) est la 2^e racine de $ax^2 + bx + c$ (le produit des racines est $\frac{c}{a}$).
- Rappelons aussi : $a > 0, b > 0, c > 0$.



Dans la figure ci-dessus, où nous avons marqué l'unité, la parabole a

pour équation : $y = \frac{9}{10}x^2 + \frac{36}{10}x + \frac{27}{10}$.



Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Livres, jeux, affiches, objets mathématiques et logiques

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :

<http://www.mathkang.org/catalogue/>



11. Réponse B. Pour le cylindre de plus grande hauteur (hauteur x) : le disque de la base a pour périmètre y et donc son rayon est $\frac{y}{2\pi}$; l'aire de la base est $\frac{y^2}{4\pi}$; le volume est donc $\frac{xy^2}{4\pi}$.
Et le volume du cylindre de plus petite hauteur est $\frac{yx^2}{4\pi}$.
Le quotient cherché est donc $\frac{y}{x}$.

12. Réponse D. Le nombre ayant c centaine(s), d dizaine(s) et u unité(s), on a $100c+10d+u+99=100u+10d+c$. D'où $99(u-c)=99$ et $u=c+1$. Comme $c \geq 1$ et $u \leq 9$, c peut donc valoir de 1 à 8, u est alors égal à $c+1$, et d peut être n'importe lequel des 10 chiffres.
Il y a donc, au total, 8×10 , soit 80 nombres possibles.

13. Réponse A. $p(10)+p(11)+p(12)+\dots+p(19)=0+1+2+\dots+9=45$.
Similairement, pour chaque dizaine de nombres, les nombres s'écrivant $d0, d1, \dots, d9$, la contribution à la somme cherchée est $d \times (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)$, soit $45d$.
La somme cherchée est donc $45 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + p(100)$, soit $45^2 + 0$. Et $45^2 = 2025$.

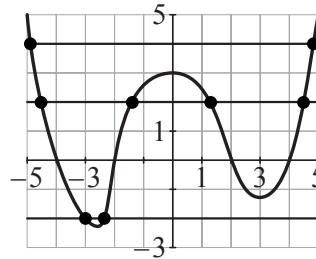
14. Réponse A. En additionnant les périmètres des triangles de périmètres 9, 12 et 20 on obtient la somme des longueurs de tous les segments tracés, c'est-à-dire aussi la somme du périmètre du grand triangle et de celui du triangle central.
Le périmètre du grand triangle est donc égal à $9 + 12 + 20 - 13$, soit 28.

15. Réponse A. Chaque fraction de la somme de 2020 termes vaut :
$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(x)f(1)}{f(x)} = f(1) = 2.$$

La somme cherchée vaut donc 2×2020 , soit 4040.
Remarque : la fonction f est la fonction telle que $f(x) = 2^x$.

16. Réponse E. La fonction qui, à la longueur de papier déroulé associe le diamètre restant du rouleau, est strictement décroissante : les graphiques A et C sont exclus. De plus : pour une longueur donnée de papier déroulé, le nombre de tours de rouleau correspondant est de plus en plus grand. Et donc le diamètre du rouleau décroît de plus en plus vite ; ce qui est le cas seulement pour le graphique E.
Remarque : on peut montrer pourquoi la courbe tracée en E est une parabole.
Soit V le volume du papier déroulé.
D'une part, $V = dex$, où d est la largeur du papier et e son épaisseur.
D'autre part, $V = d \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi y^2}{4} \right)$ où D est le diamètre initial du rouleau.
Et donc $x = \frac{\pi D^2}{4e} - \frac{\pi y^2}{4e}$ dont la représentation est bien une parabole.

17. Réponse E. La lecture graphique montre que l'équation $f(X)=0$ a 4 solutions qui sont $X=-4$, $X=-2$, $X=2$ et $X=4$.



Les solutions de l'équation $f(f(x))=0$ sont donc données par les 4 équations suivantes :

$f(x)=-4$ qui n'a pas de solution ;
 $f(x)=-2$ qui a 2 solutions ; $f(x)=2$ qui a 4 solutions ; $f(x)=4$ qui a 2 solutions.

Et ces $2+4+2$, soit 8 solutions, abscisses des points marqués ici sur la figure, sont toutes différentes.

18. Réponse B. Il y a 12 pentagones.

Il y a $\frac{12 \times 5}{2}$, soit 30 carrés (5 carrés autour de chaque pentagone mais chaque carré touche 2 pentagones).

Il y a $\frac{30 \times 2}{3}$, soit 20 triangles (2 triangles par carré mais chaque triangle touche 3 carrés).

La somme cherchée est donc $20 + (12 \times 5) - 30$ soit 50.

19. Réponse B. La somme des lignes 2 et 4 est égale à la somme des colonnes 2 et 4 (puisque toutes les sommes en ligne ou en colonne sont les mêmes). En enlevant, de chacune de ces sommes, les quatre nombres des cases marquées d'une croix, on a toujours une égalité qui s'écrit : $(20+21+2)+(24+5+6) = (16+25+4)+(22+1+x)$. Et donc $78 = 68 + x$. D'où $x = 10$.

	16		22	
20	X	21	X	2
	25		1	
24	X	5	X	6
	4		x	

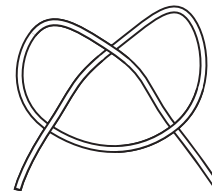
Remarque : un exemple de carré complet est montré ci-contre. C'est un carré magique avec les entiers de 1 à 25 (chacune des deux diagonales a la même somme, 65, que chaque ligne et chaque colonne).

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

20. Réponse B. À partir de l'extrémité gauche de la ficelle, on note, à chaque croisement, si le brin passe sur (noté 1) ou sous (noté 0) l'autre brin.

Il y a 8 configurations équiprobables : 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001 et 000.

Celles qui comportent deux croisements successifs de même nature ne forment pas de nœud. Au contraire, celles dont le croisement du milieu est différent des deux autres croisements forment un nœud : ce sont, celle dessinée ici, notée 101, et celle notée 010.



La probabilité que la ficelle se noue est donc $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.

21. Réponse C. Les triangles PQT et TWX sont semblables.

$$\text{Donc } \frac{PQ}{QT} = \frac{TU+UW}{WX}.$$

Soit x le côté du carré UWXY.

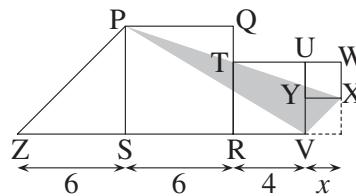
$$\text{Avec } QT = QR - TR = 6 - 4 = 2,$$

$$\text{on a donc : } \frac{6}{2} = \frac{4+x}{x}. \text{ D'où } x = 2.$$

Et on a alors aussi $VY = VU - YU = 4 - 2 = 2 = YX$.

Soit Z tel que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SZ}$. On a $(PZ) \parallel (XV)$ et donc l'aire du triangle PVX est égale à celle de ZVX :

$$\text{Aire}(PVX) = \text{Aire}(ZVX) = \frac{ZV \times VY}{2} = \frac{(6+6+4) \times 2}{2} = 16.$$



22. Réponse B. La somme des six nombres effacés est multiple de 3 (puisque la somme des effacés par Alice est le double de la somme des effacés par Bobby).

La somme des sept nombres de départ $1+2+7+9+10+15+19$, soit 63 est aussi multiple de 3.

Le nombre restant écrit est donc multiple de 3. C'est 9 ou 15.

Si c'est 15, alors la somme des trois nombres de Bobby est $\frac{1}{3}(63-15)$ soit 16, mais cela est impossible. C'est donc 9 qui est resté écrit.

Remarque : effectivement, Bobby a pu effacer 15, 2 et 1 (somme 18) et Alice 19, 10 et 7 (somme 36) ou bien Bobby, 10, 7, 1 (somme 18) et Alice 19, 15 et 2 (somme 36).

23. Réponse D. Il y a 5 couples « petit et sa maman » sur l'ensemble des deux images (2 sur la première, 3 sur la seconde). Comme les couples sur les deux images sont tous différents, c'est donc que chacun des 5 petits (a, b, c, d, e) est avec sa maman sur l'une ou l'autre des images. Et donc la maman de a est B ou D.

Si c'est B, alors, la maman de e n'étant pas B est E, la maman de c n'étant pas E est D ; mais c'est impossible car cela ferait trois couples « petit et sa maman » sur la première image.

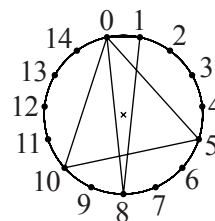
La maman de a est donc D.

(Les autres couples « petit et sa maman » sont $e/B, c/E, b/C, d/A$.)

24. Réponse A. Comptons les triangles en partant des plus petits côtés, la position du plus petit côté pouvant être fixée à une rotation près.

- Si les sommets sont 0 et 1, il y a 7 triangles différents (de 3^e sommet 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8), les autres triangles s'obtenant par symétrie par rapport au diamètre passant par 8.

- Si les sommets sont 0 et 2, il y a 5 triangles différents (de 3^e sommet 4, 5, 6, 7 ou 8), les autres triangles s'obtenant par symétrie par rapport au diamètre passant par 1.



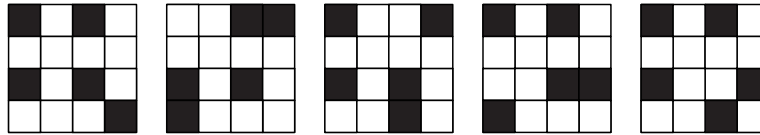
- Si les sommets sont 0 et 3, il y a 4 triangles différents (de 3^e sommet 6, 7, 8 ou 9), les autres triangles s'obtenant par symétrie par rapport au diamètre passant par 9.
 - Si les sommets sont 0 et 4, il y a 2 triangles différents (de 3^e sommet 8 ou 9), les autres triangles s'obtenant par symétrie par rapport au diamètre passant par 2.
 - Si les sommets sont 0 et 5, il y a 1 seul triangle (équilatéral, de 3^e sommet 10).
- Au total, cela fait $7 + 5 + 4 + 2 + 1$, soit 19 triangles différents.

25. Réponse 5. Les cases de la ligne et de la colonne se terminant par un 0 doivent rester blanches.

• Si la case d4 est noircie, alors la grille se complète de manière unique avec a1, a3, c1, c3 en noir.

• Si d4 n'est pas noircie, alors soit a4 soit c4 est noircie dans la 4^e colonne. Et alors, parmi les quatre cases a1, a3, c1, c3, il y aura 3 cases noires et une blanche. Cela fait 4 possibilités et, pour chacune, on trouve une solution unique (par exemple si a1 est blanche alors a3 et a4 sont noires, c4 et d4 sont blanches, c1 et c3 sont noires, d1 est noire et d3 est blanche).

On peut donc obtenir $1+4$, soit 5 grilles différentes. Les voici :



a1	a3	a4	2
			0
c1	c3	c4	2
d1	d3	d4	1
2	0	2	1

26. Réponse 3. L'équation $xy^2 + 2y^2 - x - 107 = 0$ s'écrit aussi :

$$y^2(x+2) - x - 2 - 105 = 0,$$

$$(y^2 - 1)(x+2) = 105,$$

$$(y-1)(y+1)(x+2) = 105.$$

La décomposition de 105 en facteurs premiers est $105 = 3 \times 5 \times 7$.

$y-1$ et $y+1$ devant être deux diviseurs de 105, les seules valeurs possibles pour l'entier positif $y-1$ sont 1, 3 et 5, avec, respectivement, 3, 5 et 7 pour $y+1$ et 35, 7 et 3 pour $x+2$.

Il y a donc 3 solutions : (33, 2), (5, 4) et (1, 6).

© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 6 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »