

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)

Tél. : 01 43 31 40 30

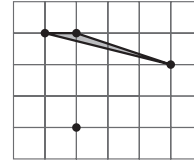
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 80 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2020 - Corrigé du sujet « J »

- Réponse B.** La prochaine année ayant la même propriété est 2121, soit 101 ans après 2020.
- Réponse D.** B et C sont des nombres à 3 chiffres, A et D à 4 chiffres et E à 5 chiffres. Le nombre du milieu de la liste est donc le plus petit entre A et D. C'est D, qui vaut entre 1000 et 2000.
- Réponse A.** Après le boutonnage du jour, la rayure du bas à droite est prolongée par la deuxième rayure du bas à gauche. Ce décalage produit une unique spirale, et donc aucun anneau fermé.
- Réponse D.** Le périmètre de la figure comporte 12 segments unité horizontaux et 8 segments unité verticaux, soit 20 segments unité.
- Réponse E.** La mère de la fille de X est X. La réponse est donc E.
- Réponse C.** La deuxième addition comporte, aux unités comme aux dizaines, 2 fois chaque chiffre de la première addition. Son résultat est donc le double : $79 \times 2 = 158$.
- Réponse D.** Sur 2 semaines soit 14 jours, il y a toujours 2×3 soit 6 jours où Gabrielle fait du surf. Pour faire le plus possible de surf, Lucas doit donc en faire le plus possible les 4 premiers jours ($18 - 14 = 4$). Et c'est donc en commençant le samedi, seul jour de la semaine qui lui permet de faire 3 séances en 4 jours.
- Réponse C.** Les 4 entiers consécutifs dont la somme est 2 sont -1, 0, 1 et 2.

9. Réponse A. L'aire d'un triangle vaut la moitié du produit d'une hauteur par la base associée. Des quatre triangles pouvant être formés, celui ayant la plus petite aire a une base égale à 1 et une hauteur égale à 1 (voir figure). Son aire vaut $\frac{1}{2}$.



10. Réponse E. Soit t le nombre de triangles avant les découpages et donc $10-t$ le nombre de carrés.

3 carrés ayant été remplacés par 6 triangles, le nombre de sommets après les découpages est $42 = 3(6+t) + 4(10-t-3)$. D'où $t = 18 + 28 - 42$ et $t = 4$. Marie avait 4 triangles avant de découper.

11. Réponse B. Comme $pqrs = 2(rs)^2$, il ne peut pas être égal à 100 qui n'est pas le double d'un carré ($100 = 2 \times 50$). Et les autres nombres proposés sont bien le double d'un carré : $50 = 2 \times 5^2$ (A), $200 = 2 \times 10^2$ (C), $450 = 2 \times 15^2$ (D), $800 = 2 \times 20^2$ (E).

12. Réponse B. Maville et Chétoy sont séparés de 12 km ($3+9$ d'après le premier poteau ou $6+6$ d'après le deuxième). Issy se situe entre les deux, d'après le premier poteau, à 4 km de Maville ($3+1$) et à 8 km de Chétoy ($9-1$). Sur le panneau cassé, il était donc écrit « 2 km ».

13. Réponse B. Si le triangle isocèle n'avait qu'un côté de 20 cm, les longueurs des deux autres côtés seraient égales. Il y a donc deux côtés de longueur 20 cm et le troisième côté mesure soit 8 cm ($2/5$ de 20 cm) soit 50 cm ($5/2$ de 20 cm). Dans le deuxième cas l'inégalité triangulaire ne serait pas respectée : $50 > 20 + 20$. Le périmètre du triangle isocèle est donc $20 + 20 + 8$, soit 48 cm.

14. Réponse A. En divisant par 17 chaque membre de l'égalité $17x + 51y = 102$, elle devient $x + 3y = 6$. Et en multipliant alors chaque membre par 9, on obtient $9x + 27y = 54$. La réponse est donc 54.

15. Réponse C. Cherchons les années $20\overline{du}$ (d est le chiffre des dizaines et u le chiffre des unités) telles que $20 \times \overline{du}$ soit un carré. $20 = 2^2 \times 5$, donc il faut que \overline{du} soit égal à 5 fois un carré. $5 \times 5^2 = 125$ est supérieur à 100 donc le nombre \overline{du} ne peut être que 5×1^2 (mais cela ne convient pas car 2005 est inférieur à 2010) ou 5×2^2 , ou 5×3^2 , ou 5×4^2 . Cela donne 3 années : 2020, 2045 et 2080.



Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

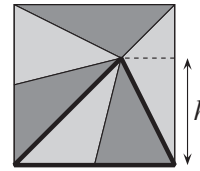
Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :

<http://www.mathkang.org/catalogue/>



16. Réponse D. $81 = 9 \times 9$, donc le côté du carré est 9 dm.

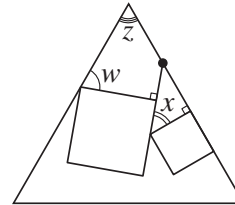
Soit h la distance cherchée (en dm); c'est la hauteur du triangle composé des deux triangles ayant leur base sur le bord inférieur du vitrail.



L'aire de ce triangle vaut $\frac{1}{2} \times 9 \times h$ et aussi $2 \times \frac{81}{6}$. D'où $h = \frac{4}{6} \times 9 = 6$.

17. Réponse D. Pour les 55 premiers km, Thibault a utilisé 5,5 litres d'essence. Il lui en reste donc $14 - 5,5$ soit 8,5 litres, qui lui permettent de parcourir 85 km. S'il s'arrête à l'une des trois premières stations, il aura au moins $520 - (55 + 55)$ soit 410 km encore à faire; et comme il ne fait que 400 km avec un plein, il devra s'arrêter une deuxième fois. Il doit donc s'arrêter au plus tard à la station qui se trouve à 75 km; et, ayant alors $520 - (55 + 75)$ soit 390 km encore à faire, il pourra les faire avec un plein.

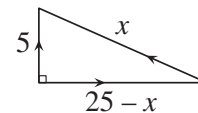
18. Réponse E. Les angles supplémentaires au point indiqué sur la figure sont, avec $z = 60^\circ$ puisque le triangle est équilatéral, $360^\circ - 60^\circ - w - 90^\circ$ et $180^\circ - 90^\circ - x$.
D'où $(210^\circ - w) + (90^\circ - x) = 180^\circ$
et $x = 120^\circ - w = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.



19. Réponse B. Être divisible par 18 c'est être divisible par 2 et par 9. Tous les nombres écrits avec les chiffres de 1 à 9 (une fois chacun) sont divisibles par 9 car la somme de ces chiffres vaut 45. Un nombre sera aussi divisible par 2 si son dernier chiffre est pair. Et comme il y a 4 chiffres pairs sur les 9, le nombre a 4 chances sur 9 d'avoir son dernier chiffre pair. La probabilité cherchée est donc $\frac{4}{9}$.

20. Réponse E. La deuxième affirmation est : « si un pion est bleu, alors il est triangulaire ».
La première affirmation est équivalente à : « si un pion est non-carré, alors il est non-épais ». Elle équivaut donc ici à : « si un pion est triangulaire, alors il est mince ».
On peut donc affirmer E : si un pion est bleu, alors il est mince.
Aucune des autres propositions ne découle des affirmations données.

21. Réponse C. Le lièvre, allant 5 fois plus vite que la tortue, a parcouru 25 km tandis qu'elle en parcourait 5. Soit x la distance cherchée en km. x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est 5 et l'autre $25 - x$; donc $x^2 = 5^2 + (25 - x)^2$.
D'où $50x = 5^2 + 25^2$, $2x = 1 + 25$, $x = 13$.

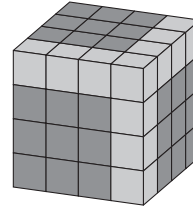


22. Réponse C. Le grand cube est constitué de $4 \times 4 \times 4$ cubes.

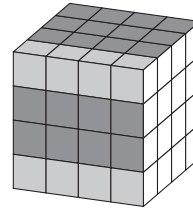
Il peut être peint de deux façons.

• Soit les 3 faces peintes ont un sommet commun.

Alors, tous les cubes des arêtes communes ont deux ou trois faces peintes. Seuls 9 cubes par face ont une seule face peinte. Ce qui donne 27 cubes avec une seule face peinte.



• Soit les 3 faces peintes sont 2 faces opposées (dessus et dessous sur la figure) et une face qui les joint ayant une arête commune avec chacune. Alors, les faces opposées ont chacune 3×4 , soit 12 cubes avec une seule face peinte ; et la face qui les joint a seulement 2×4 , soit 8 cubes avec une seule face peinte. Cela fait $12 + 12 + 8$, soit 32 faces peintes.



Le nombre maximum de petits cubes avec une seule face peinte est donc 32.

23. Réponse D. Nommons certains points

(voir figure ci-contre).

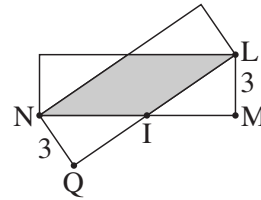
Les triangles rectangles INQ et ILM ont même angle en I et $NQ = LM$ donc $IN = IL$.

Dans le triangle rectangle ILM , on a :

$IL^2 = LM^2 + MI^2$. Soit, sachant que $NM = 9$,

$IN^2 = 3^2 + (9 - IN)^2$. D'où $18 \times IN = 9 + 81$ et $IN = 5$.

L'aire de chevauchement est donc l'aire d'un parallélogramme (qui est aussi un losange) de base 5 cm et de hauteur 3 cm, soit 15 cm^2 .



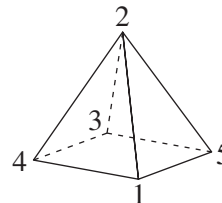
24. Réponse C. La somme 7 ne s'obtient que par $1 + 2 + 4$ (toute autre somme de trois ou quatre des nombres est supérieure à 7). Elle correspond à une face triangulaire et donc le sommet de la pyramide est 1, 2 ou 4.

Ce sommet n'est pas 4, sinon il y aurait deux sommes strictement supérieures à 10 : la face latérale avec 4, 3, 5 (opposée à celle avec 1, 2, 4) et la base carrée avec 1, 2, 3, 5.

Ce sommet n'est pas 1, sinon : la base carrée aurait pour somme 14 ($5 + 4 + 3 + 2$), la somme 10 ne pourrait alors être qu'avec $10 = 1 + 5 + 4$,

et une autre face triangulaire aurait pour somme $1 + 2 + 3$ (qui ne vaut ni 7 ni 8 ni 9).

Le sommet de la pyramide est donc 2 et la somme manquante est celle de la base carrée : $5 + 4 + 3 + 1 = 13$. (La situation est bien possible comme le montre le dessin.)



25. Réponse 6. Si la division de 7240 par n donne un reste égal à 37 c'est que $7240 = nq + 37$, avec $n > 37$, q étant le quotient de la division. Alors, $nq = 7240 - 37 = 7203 = 3 \times 7^4$. Le nombre 7203 a 10 diviseurs que l'on peut associer par deux : 1×7203 , 3×2401 , 7×1029 , 21×343 , et 49×147 .

Comme $n > 37$, il y a 6 entiers n possibles : 7203, 2401, 1029, 343, 147 et 49.

26. Réponse 4. Aucun des huit entiers ne peut avoir 0 comme chiffre des unités donc les huit chiffres des unités des nombres consécutifs sont soit 1, 2, ..., 8 soit 2, 3, ..., 9. Notons que 3, 5, 7 et 8 sont dans les deux listes (et sont premiers entre eux).

Si un entier \overline{cdu} (c chiffre des centaines, d chiffre des dizaines, u chiffre des unités) est divisible par u alors $\overline{cdu} - u$, soit $\overline{cd0}$ l'est aussi.

Nous cherchons donc des entiers tels que $\overline{cd0}$ soit multiple de 3, 5, 7 et 8 et donc de $3 \times 5 \times 7 \times 8 = 840$.

$\overline{cd0}$ ne peut donc être que 840 (dont les autres multiples ont au moins 4 chiffres) et comme 849 est n'est pas divisible par 9, les huit entiers consécutifs sont 841, 842, ..., 848 (chacun étant bien divisible par son chiffre des unités).

La différence cherchée est $8 - 4 = 4$.

© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 5 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »