KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 79 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2019 - Corrigé du sujet « S »

1. Réponse **D.** Les nombres qu'on peut obtenir sont -8, 8, 1, -7 et 11 avec $2-0\times1+9$ ou $2-0+1\times9$.

2. Réponse **A.** Si la largeur du rectangle blanc vaut 1, sa longueur, comme celle du rectangle noir, vaut 2.

3. Réponse **A.** La seule manière d'obtenir une somme égale à 4, c'est avec 3 et 1. Donc 1 et 3 sont dans la même ligne ou la même colonne. On peut les placer dans cet ordre sur la première ligne, le problème reste le même. Alors, pour avoir au moins une somme égale à 5, il faut placer le 2 et le 4 comme sur la figure ci-contre. Et les deux autres sommes sont 5 et 6.

1	3
4	2

4. Réponse **E.** Pour A, B et C, l'aire grisée vaut la moitié de l'aire du rectangle (un ou plusieurs triangles ont la même hauteur, celle d'un côté du rectangle, et la somme de leurs bases mesure l'autre côté du rectangle). L'aire grisée en D est plus petite. Et l'aire grisée en E est plus grande (de la moitié de l'aire de son petit rectangle grisé).

5. Réponse **D.** Les triangles gris et blanc sont imbriqués dans les dessins A, D et E.
Les triangles noir et gris ne sont pas imbriqués dans les dessins B, C et D.
Donc seul D peut être le bon dessin, et c'est bien le cas avec les triangles noir et blanc bien imbriqués.

6. Réponse **B.** Le plus petit entier dont la somme des chiffres est 2019 doit contenir le plus de 9 possibles. Or $2019=(9\times224)+3$. C'est donc le nombre qui s'écrit avec le chiffre 3 suivi de 224 chiffres 9.

7. Réponse **B.** La somme des chiffres des unités est 16. La somme des chiffres des dizaines vaut donc $1+4+2+$un chiffre caché. Devant se terminer par 2, cette somme est 12 et le chiffre caché est 5. La somme des chiffres des centaines est alors $1+2+1+$un chiffre caché. Devant se terminer par 1, cette somme est 11 et le chiffre caché est 7. La somme des milliers est alors $1+7+2+$un chiffre caché. Cette somme valant 11, le chiffre caché est 1.
Les chiffres cachés sont donc 5, 7 et 1.

8. Réponse **E.** Le carré de l'hypoténuse doit être la somme des carrés des deux autres côtés. Seul le triangle E convient avec $3=2+1$.

9. Réponse **C.** La pyramide a 23 arêtes joignant la base au sommet (autant que de triangles), et 23 arêtes formant le périmètre de la base, soit 46 arêtes au total.

10. Réponse **D.** Si le nombre d'adhérents a augmenté exactement de 20%, soit un cinquième, c'est que ce nombre était un multiple de 5. C'était donc 35 et il a augmenté de 7. Il y a donc, cette année, $35+7$, soit 42 adhérents.

11. Réponse **A.** On a $(a @ b) @ c = c-(b-a) = c-b+a$
et $a @ (b @ c) = (c-b)-a = c-b-a$. Alors $a=-a$ et donc $a=0$.

12. Réponse **E.** Soient x, y et z les trois dimensions de la boîte en cm de sorte que $120=2xy=3xz=5yz$. On a alors $120^3=2\times3\times5\times(xyz)^2$.
D'où $(xyz)^2=120^2\times4$ et $xyz=120\times2=240$.
Le volume de la boîte est 240 cm^3.

13. Réponse **C.** Le plus grand diviseur de n (autre que n) est inférieur ou égal $n/2$; étant égal à $n-6$, on a donc $n\leqslant 12$. Examinons les cas possibles, sachant qu'on a aussi $n>6$:
- pour 12, le « plus grand diviseur » est 6 et on a bien $12-6=6$;
- pour 11, le « plus grand diviseur » est 1 mais $11-6\neq1$;
- pour 10, le « plus grand diviseur » est 5 mais $10-6\neq5$;
- pour 9, le « plus grand diviseur » est 3 et on a bien $9-6=3$;
- pour 8, le « plus grand diviseur » est 4 mais $8-6\neq4$;
- pour 7, le « plus grand diviseur » est 1 et on a bien $7-6=1$.

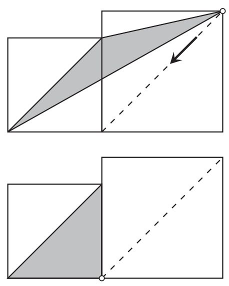
Il y a donc 3 entiers strictement positifs n dont le plus grand diviseur (en excluant n lui-même) est $n-6$. Ce sont 12, 8 et 7.

14. Réponse **A.** Notons A le tirage d'une pièce d'argent et O celui d'une pièce d'or. Il y a 5 tirages équiprobables possibles : OAAAA, AOAAA, AAOAA, AAAOA, AAAAO. Deux correspondent au tirage de la pièce d'or par Claudie : AOAAA et AAAOA.

La probabilité que Claudie ait la pièce d'or est donc $\frac{2}{5}$.

15. Réponse **D.** On a $2^{13} = 2^3 \times 2^{10} = 8 \times 2^{10}$ donc les nombres divisibles par 2^{10} compris entre 2^{10} et 2^{13} sont les 8 nombres : 2^{10}, 2×2^{10}, 3×2^{10}, 4×2^{10}, 5×2^{10}, 6×2^{10}, 7×2^{10} et 8×2^{10}.

16. Réponse **B.** L'aire d'un triangle ne change pas quand on déplace un sommet parallèlement au côté opposé. En déplaçant le sommet le plus à droite du triangle grisé parallèlement à son côté opposé (dont la direction est celle d'une diagonale du petit comme du grand carré), on obtient un triangle dont l'aire est la moitié de celle du petit carré, c'est-à-dire $\frac{1}{2}p^2$.



17. Réponse **A.** Soit $Z = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}$.

On a $Z > \sqrt{20} > \sqrt{16}$ donc $Z > 4$. D'autre part :

$\sqrt{20} < \sqrt{25}$ donc $\sqrt{20} < 5$, $20 + \sqrt{20} < 25$, $\sqrt{20 + \sqrt{20}} < 5$.

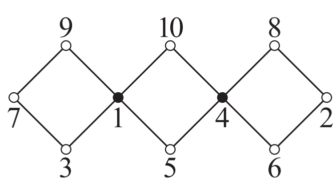
Et $20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}} < 25$ donc $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} < 5$.

Et enfin $20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} < 25$ donc $Z < 5$.

La partie entière cherchée est donc 4.

18. Réponse **D.** L'équation du second degré $x^2 + 4x - k = 0$ a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $4^2 + 4k > 0$ donc si et seulement si $k > -4$.

19. Réponse **C.** La somme des nombres de 1 à 10 vaut 55.



Si S est la somme commune aux trois carrés et que les deux nombres m et n sont ceux qui sont sur deux carrés (points noirs sur la figure), alors on a $3S - (m + n) = 55$.

La somme $m + n$ étant au moins égale à $1 + 2$, on a $3S \geqslant 58$ et donc $3S \geqslant 60$ soit $S \geqslant 20$.

Et, comme on peut trouver une configuration avec $S = 20$ (la figure montre un exemple), 20 est la plus petite valeur possible

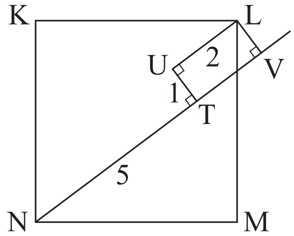
20. Réponse **E.** On a $x+\frac{y}{z}=11$ et $y+\frac{x}{z}=14$.

En additionnant ces deux équations, on obtient $(x+y)\left(1+\frac{1}{z}\right)=25$;
d'où $25z=(x+y)(z+1)$ et $z+1$ divise 25.
Or $z+1\neq 25$ car si $z=24$, alors la résolution du système en x et y ne donne pas des nombres entiers.

Donc $z+1=5$, $z=4$, $x+y=20$ et $\frac{x+y}{z}=\frac{20}{4}=5$.

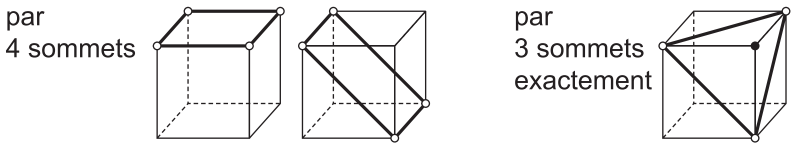
Et en résolvant le système en x et y, on trouve $x=8$ et $y=12$.

21. Réponse **E.** Soit V le pied de la perpendiculaire issue de L sur la droite (NT).
On a $NL^2=NV^2+VL^2$.
$NL^2=(5+2)^2+1^2=50=(5\sqrt{2})^2$.
Et, si q est le côté du carré KLMN, on a $NL=q\sqrt{2}$ d'où $q=5$.



22. Réponse **D.** On a $|n^2-2n-3|=|(n+1)(n-3)|$. Pour que cette valeur absolue soit un nombre premier, il faut que $(n+1)$ ou $(n-3)$ vaille $+1$ ou -1. Cela donne quatre valeurs de n à tester : 0, -2, 4 et 2. Les nombres obtenus alors pour $|(n+1)(n-3)|$ sont respectivement 3, 5, 5 et 3 qui sont premiers. La condition est donc vérifiée pour 4 valeurs de n.

23. Réponse **E.** Aucun plan ne passe par 5 sommets d'un cube.
•Les plans passant par 4 sommets d'un cube sont soit les plans contenant une face (il y en a 6), soit les plans passant par deux arêtes parallèles et opposées (il y en a aussi 6).



• Si les plans passent par exactement trois sommets du cube, les trois sommets ne peuvent pas être sur la même face et il y en a donc deux sur une face et un sur la face opposée. Comme un plan passant par une arête du cube et un autre sommet passe par quatre sommets, on déduit donc qu'un plan passant par exactement trois sommets du cube passe par une diagonale de face. Et alors, si le plan ne doit pas passer par un 4^e^ sommet, il passe par trois diagonales comme indiqué sur la figure. Des plans ainsi définis coupent le cube laissant un sommet d'un côté (sommet en noir sur la figure) et quatre sommets de l'autre. Comme le cube a 8 sommets, cela fait 8 plans passant par exactement trois sommets.
• Au total, il y a $6+6+8$ soit 20 plans passant par au moins 3 sommets d'un cube.

24. Réponse **C.** Calculons les premiers termes de la suite :
$u_1 = 49$, $u_2 = (1+4+9)^2 = 196$, $u_3 = (1+1+9+6)^2 = 289$,
$u_4 = (1+2+8+9)^2 = 400$, $u_5 = (1+4)^2 = 25$, $u_6 = (1+2+5)^2 = 64$,
$u_7 = (1+6+4)^2 = 121$, $u_8 = (1+1+2+1)^2 = 25$.
$u_8 = u_5$ et la suite est périodique de période 3 à partir de $n = 5$.
Et comme $2019 = (671 \times 3) + 6$, on a $u_{2019} = u_6 = 64$.

25. Réponse **3.** La somme totale des nombres est $(1+2+3+4+5) \times 5$ soit 75. Dans chacune des 3 zones, la somme des nombres est donc 25.

1	2	4	5	3
3	1	2	4	5
5	3	1	2	4
4	5	3	1	2
2	4	5	3	1

• Dans la zone grise du bas, il ne peut y avoir moins de trois 5 sinon la somme ne dépasserait pas $2+5+5+4+4+4$ soit 24. Il y a donc trois 5, et, par suite, deux 4, qui ne peuvent se placer que comme indiqué sur la figure.
• Les trois 5 étant ainsi placés dans la zone grise du bas, les deux autres 5 sont nécessairement dans la zone grise du haut ; et alors, la somme des quatre autres nombres doit faire $25 - (2 \times 5)$ soit 15 et ne peut être obtenue que par $4+4+4+3$. Dans cette zone, les trois 4 sont nécessairement dans les 3 cases en diagonale (voir figure), puis les deux 5 et le 3 ne peuvent se placer que comme indiqué.
C'est donc un 3 qui figure dans la case en haut à droite (et la situation est bien possible comme le montre la figure complète).

26. Réponse **6.** Listons les cas où, de trois entiers différents parmi nombres de 1 et 10, l'un est la moyenne des deux autres, il y en a 20 :
- moyenne 1, aucun (car les entiers sont tous différents),
- moyenne 2, $\{1;3\}$,
- moyenne 3, $\{1;5\}$ $\{2;4\}$,
- moyenne 4, $\{1;7\}$ $\{2;6\}$ $\{3;5\}$,
- moyenne 5, $\{1;9\}$ $\{2;8\}$ $\{3;7\}$ $\{4;6\}$,
- moyenne 6, $\{2;10\}$ $\{3;9\}$ $\{4;8\}$ $\{5;7\}$,
- moyenne 7, $\{4;10\}$ $\{5;9\}$ $\{6;8\}$,
- moyenne 8, $\{6;10\}$ $\{7;9\}$,
- moyenne 9, $\{8;10\}$,
- moyenne 10, aucun.

Le nombre total de tirages possibles des trois nombres étant $\binom{10}{3}$ soit $\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}$, la probabilité cherchée est $\frac{1}{n} = 20 \times \frac{3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$. Et $n = 6$.

[On peut remarquer que pour que la moyenne de deux des nombres de l'ensemble soit aussi dans l'ensemble, il faut et il suffit que les deux nombres soient de même parité. Comme il y a 5 nombres pairs et 5 impairs, le nombre de tirages favorables est $2 \times \binom{5}{2}$ soit 20.]