KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs de plus de 79 pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2019 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse **D.** $20\times 19 + 20 + 19 = 20\times 20 + 19 = 419$.

2. Réponse **B.** 6 fois 1 minute et 11 secondes c'est 6 minutes et 66 secondes donc 7 minutes et 6 secondes.

3. Réponse **C.** En additionnant 3 entiers (compris entre 1 et 6, inclus), on peut obtenir tous les entiers de 3 à 18, soit 16 entiers.

4. Réponse **B.** Le verre A contient de l'eau jusqu'à la 4^{e} graduation. Il contient autant que le verre penché C (1re et 7^{e} graduations), le D (3^{e} et 5^{e} graduations) et le E (2^{e} et 6^{e} graduations). Le verre B contient plus d'eau (3^{e} et 6^{e} graduations) : posé a plat, la surface de l'eau serait entre les 4^{e} et 5^{e} graduations.

5. Réponse **B.** Luc peut entrer par l'une des 5 portes et sortir par l'une des 4 autres. Cela fait 4 fois 5, soit 20 possibilités.

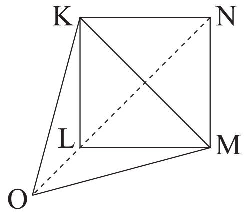
6. Réponse **D.** Celui des deux zombies qui a le moins de dents en a moins de la moitié. Et il peut en avoir 31, l'autre en ayant alors 32.

7. Réponse **B.** L'angle non marqué (complémentaire de $\alpha+\beta$) est égal à α (car leur tangente est égale à 2/3). On a donc $2\alpha+\beta=90°$.

8. Réponse **A.** Toutes les figures où il n'y a que des triangles grisés (B, C, D et E) ont même aire car la hauteur de tous les triangles est égale au côté du carré et, dans chaque cas, la somme des bases est aussi égale au côté du carré. Cette aire vaut la moitié de celle du carré. L'aire grisée de A est plus grande de la moitié de l'aire de son petit rectangle grisé.

9. Réponse **B.** Pour les unités et les dizaines, on a $63 = 28 + 4 + 31$ et il n'y a pas de retenue.
Pour les centaines, on doit trouver 2 en unités en additionnant $7 + 3 +$ un chiffre caché. Ce chiffre est donc 2 et il y a une retenue pour les milliers. On doit avoir alors $1 + 15 + 22 + x = 57$, d'où $x = 19$. Les deux autres chiffres cachés sont donc 1 et 9.

10. Réponse **C.** La diagonale (NL) du carré est axe de symétrie de la figure donc :



$\widehat{\text{NLM}} = \dfrac{1}{2}\widehat{\text{KLM}} = 45°.$

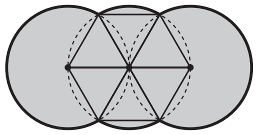
Et : $\widehat{\text{MLO}} = 180° - \widehat{\text{NLM}} = 135°.$

11. Réponse **C.** Sur le dé spécial, qui a 6 faces, trois faces portent le 1, deux faces portent le 2 et une face porte le 3. Le dessin C, avec un dé qui a deux faces portant le 3, ne peut donc pas représenter ce dé (contrairement aux quatre autres dessins).

12. Réponse **C.** Pour que les fractions additionnées soit les plus petites possibles, il faut que les numérateurs soient les plus petits possibles et que les dénominateurs soient les plus grands possibles. Les numérateurs sont donc 1 et 2 et les dénominateurs sont 9 et 10. Alors, la fraction avec un 2 au numérateur doit être la plus petite possible et, donc, avoir 10 pour dénominateur.
Le nombre le plus petit possible est $\dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{9}$, soit $\dfrac{18+10}{90}$ ou $\dfrac{14}{45}$.

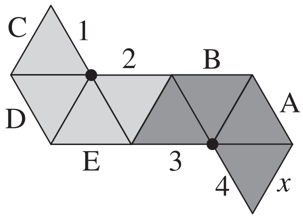
13. Réponse **E.** Prenons la largeur d'une bande horizontale pour unité de longueur ; le drapeau est alors un rectangle 3×5.
Soit x la longueur d'une bande horizontale. Alors, l'aire d'une de ces bandes est x et l'aire du rectangle gris foncé est $(5 - x) \times 3$. Ces deux aires étant égales, on a $4x = 15$.
Et le rapport demandé est $\dfrac{1}{x}$, soit $\dfrac{4}{15}$.

14. Réponse **C.** Comme $S(x+7) = S(x)$, on a $S(x+7k) = S(x)$ pour tout entier k positif. Or $2019 = (7 \times 288) + 3$. d'où $S(2019) = S(3) = 7 - 3 = 4$. (La fonction S est une fonction périodique, de période 7.)



15. Réponse **A.** Les cercles découpent, les uns sur les autres, des arcs de 60° ou 120° (ci-contre, les triangles dessinés sont des triangles équilatéraux de côté R). Le périmètre de la figure est donc, en sixièmes de cercle, $4+1+4+1$, soit 10. Ce périmètre vaut donc $\frac{10}{6} \times 2\pi R = \frac{10\pi R}{3}$.

16. Réponse **D.** La distance à parcourir en nageant est $1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)$, soit $\frac{1}{20}$ de la distance totale. Cette distance valant 2 km, le nombre total de kilomètres à parcourir est 40 km.



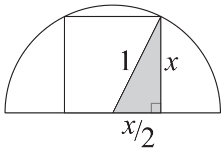
17. Réponse **E.** Les deux points noirs marqués sur la figure ci-contre sont des sommets opposés de l'octaèdre ; l'un est commun aux 4 faces gris clair, l'autre aux 4 faces gris foncé. Ainsi 1 et 2 coïncideront, 3 et 4 aussi et en recollant alors les deux moitiés de l'octaèdre, C coïncidera avec B, D avec A et E avec x.

18. Réponse **C.** On a $3a+4b=10a+b$. D'où $7a=3b$. C'est donc que a vaut 3 et b vaut 7. Et alors, $a+b=10$.

19. Réponse **D.** On ne peut pas confectionner plus de 11 boîtes car alors il faudrait au moins 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 soit 66 poires. On ne peut pas confectionner 11 boîtes car alors on ne pourrait pas partager les 60 pommes pour en mettre le même nombre dans chaque boîte. On peut avoir 10 boîtes, et ce sera donc le maximum possible, avec 6 pommes par boîte et par exemple 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 15 comme nombres de poires.

20. Réponse **E.** Les vitesses de P et Q sont dans le rapport des rayons. On a donc $\frac{OP}{OQ}=2{,}5$.

Comme $OP=OQ+3$, on a $1{,}5 \times OQ = 3$. Donc $OQ=2$ et $OP=5$.

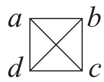


21. Réponse **A.** La figure initiale est symétrique : le centre du cercle est au milieu du côté bas du carré. Soit x le côté du carré (en dm). Le rayon du cercle valant 1 dm, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$x^2+\frac{x^2}{4}=1^2$. D'où $x^2=\frac{4}{5}$ qui est l'aire du carré en dm^2.

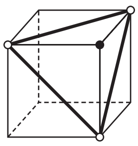
22. Réponse **B.** Les cinq premiers trios sont (123), (456), (789), (101) et (112). Le nombre 12 finissant un trio alors le nombre 15 finit aussi un trio puisque les 3 nombres à 2 chiffres 13, 14 et 15 forment les 2 trios (131) et (415) ; et ainsi, tout nombre multiple de 3 jusqu'à 99 finit un trio. Donc :
21 finit un trio, et le trio suivant est (222) venant de 22 et du 2 de 23,
45 finit un trio, et le trio suivant est (464),
63 finit un trio, et le trio suivant est (646),
87 finit un trio, et le trio suivant est (888),
42 finit un trio, et les trios suivants sont (434) et (445).
Dans la suite de chiffres écrite, il n'y a pas d'autres endroits où trois chiffres 4 se suivent ailleurs qu'avec 44 suivi de 45. On ne peut donc pas obtenir le trio (444).
Remarque : certaines suites de trois chiffres peuvent se retrouver deux fois comme « 192 » qui peut être obtenu avec 19 et 20 ou bien 91 et 92.

23. Réponse **D.** Soit a le plus petit des quatre entiers, c celui sur la même diagonale et b et d les deux autres. a est au moins égal à 2 car sinon c serait multiple de a.



a étant le plus petit, b est multiple de a. Et comme c n'est pas multiple de a, c n'est pas multiple de b et donc c'est b qui est multiple de c. On a donc b multiple de ac. De même, d est multiple de ac.
Alors, pour que la somme $a+b+c+d$ soit la plus petite possible, il faut que a et c soient les plus petits possibles. Donc $a=2$ et $c=3$.
b et d sont donc multiples de 6 mais aucun ne doit être multiple de l'autre : pour qu'ils soient les plus petits possibles, ils doivent donc valoir 12 et 18. Et la somme est donc $2+3+12+18=35$.

24. Réponse **D.** Les trois sommets ne pouvant être sur la même face, il y en a obligatoirement deux sur une face et un sur la face opposée. Comme un plan passant par une arête du cube et un autre sommet passe par quatre sommets, on déduit donc qu'un plan passant par exactement trois sommets du cube passe par une diagonale de face.



Et alors, si le plan ne doit pas passer par un 4^e sommet, il passe par trois diagonales comme indiqué sur la figure.
Des plans ainsi définis coupent le cube laissant un sommet d'un côté (sommet en noir sur la figure) et quatre sommets de l'autre. Comme le cube a 8 sommets, cela fait 8 plans passant par exactement trois sommets.

25. Réponse **2.** Il n'y a qu'un 7 dans la décomposition des neuf nombres en facteurs premiers ; il faut donc retirer au moins 70.
Le produit des autres nombres est alors :
$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 9 \times 10^8 = 2^{15} \times 3^4 \times 5^9$.
Pour avoir un carré parfait, il faut que tous les exposants soient pairs.
Et, il faut donc retirer au moins un deuxième nombre.
On peut, par exemple, ne pas prendre 10 ($= 2 \times 5$), le carré étant alors $2^{14} \times 3^4 \times 5^8 = (2^7 \times 3^2 \times 5^4)^2$.
Finalement, le plus petit nombre d'éléments à retirer pour que le produit des éléments restants soit un carré parfait est 2, en retirant par exemple 10 et 70.
(On pourrait aussi retirer 40 et 70 ou bien 90 et 70.)

26. Réponse **2.** Soit $a = 100u + 10d + u$, où u est le chiffre des unités de a (égal au chiffre des centaines, donc non nul) et d le chiffre des dizaines. Comme $c = 2b + 1 = 4a + 3$ est un entier inférieur à 1000, on a donc $u = 1$ ou $u = 2$.
$u = 2$ est impossible car sinon c aurait le même chiffre des unités que $4u + 3$ soit 1 ; et le chiffre des centaines de c serait aussi 1 alors qu'on a $c > 4a > 800$. Donc $u = 1$.
Alors $a = 100 + 10d + 1$, $c = 4a + 3 = 400 + 40d + 7$, et puisque le chiffre des centaines de c est égal à son chiffre des unités, soit 7, $40d$ doit être supérieur à 300, donc $d = 8$ ou $d = 9$.
Finalement, il n'existe que 2 triplets : (181, 363, 727) et (191, 383, 767).