

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)

Tél. : 01 43 31 40 30

www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une soixantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2016 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse D. Faisant abstraction du 9, égal à la moyenne, le troisième nombre est égal à $(2 \times 9) - 5$ soit 13.

2. Réponse E. La largeur du drapeau est égale au diamètre du cercle donc égale à 3 m. La longueur du drapeau vaut donc 6 m. Et l'aire, en m^2 , est 3×6 , soit 18.

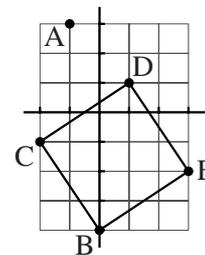
3. Réponse E. Le nombre de réponses justes est égal aux deux-tiers du nombre de questions et donc à 40.

4. Réponse C. $17 \times 3 = 51$ et $\frac{2016}{999}$ est proche de 2.

Le nombre donné est donc proche de 100.

5. Réponse A. Le plus rapide est de faire le graphique. Le carré est BCDE.

Remarque : $\overrightarrow{BC}(-2 ; 3)$, $\overrightarrow{CD}(3 ; 2)$,
 $\overrightarrow{DE}(2 ; -3)$, $\overrightarrow{EB}(-3 ; -2)$.



6. Réponse C. 000 correspond à -2 . 0000 correspond à -3 . La somme de ces deux nombres vaut -5 , que Lucas écrit 000000 (avec un nombre de zéros égal à un de plus que la valeur absolue du nombre négatif).

7. Réponse D. Une semaine c'est 7×24 heures. $2016 = 7 \times 24 \times 12$. Donc 2016 heures font 12 semaines.

Kangourou 2016 - Corrigé du sujet « J »

8. Réponse C. On a $\frac{8^k}{2^k} = 4^k$ et $2^{12} = (2^2)^6 = 4^6$. D'où $k = 6$.

9. Réponse D. Tous les nombres positifs sur les dés sont pairs donc 7 ne peut pas être obtenu par addition de nombres positifs. Si on a un nombre négatif (-1 , -3 ou -5), la somme maximale possible est $-1 + 6$ qui est inférieure à 7. Il est donc impossible d'obtenir 7. (On a, par exemple, $3 = 4 - 1$, $4 = 2 + 2$, $5 = 6 - 1$, $8 = 6 + 2$.)

10. Réponse B. Il faut déplacer au moins le E et le V de 2 lettres vers la droite, ce qui nécessite 4 échanges. Et on peut le faire, par exemple, de cette manière : VELO, VLEO, VLOE, LVOE, LOVE.

11. Réponse E. Daniel n'a pu choisir qu'un des deux nombres lorsque leur somme est 10. Il ne peut donc prendre qu'un seul nombre parmi chacun des couples $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$ et $(4, 6)$. Si Daniel a choisi cinq nombres différents, il a donc nécessairement pris 5.

12. Réponse A. Le segment dont on cherche la longueur se compose d'une diagonale du carré central (de longueur $\sqrt{2}$) et de deux petits segments de même longueur. La somme des longueurs de ces deux petits segments s'obtient en ôtant un diamètre de cercle (1) à la diagonale d'un petit carré ($\sqrt{2}$).

Enfin la distance entre les deux cercles est $2\sqrt{2} - 1$.

13. Réponse E. Les deux finalistes ont joué 3 rencontres. Uzi était donc finaliste. Or Yin a battu Uzi et donc Yin a gagné la finale. Yin a battu Zoé qui n'a fait qu'une rencontre donc c'était en quart de finale. La rencontre manquante oppose donc, en demi-finale, Yin à quelqu'un qui a gagné une rencontre mais dont la défaite n'a pas été donnée : c'est Wan. (On peut aussi reconstituer le tableau complet du tournoi.)

14. Réponse D. Chacun des 3 petits triangles blancs est une réduction au cinquième du grand triangle et a donc une aire égale au vingt-cinquième de l'aire du grand triangle.

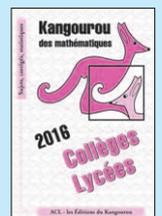
L'aire grisée est donc $\frac{22}{25}$ fois l'aire du grand triangle, soit $\frac{88}{100}$.



Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :

<http://www.mathkang.org/catalogue/>



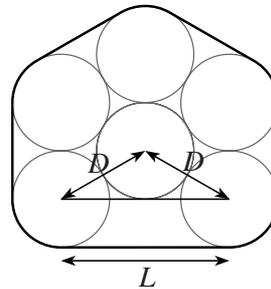
15. Réponse E. f est linéaire et $f(2)=4$ donc $f(x)=2x$.
 En particulier $f(3)=6$. Alors : $g(3)=-6$. Et comme g est affine,
 $g(2)-g(1)=g(3)-g(2)$, soit $g(1)=2g(2)-g(3)=8+6=14$.
 On peut aussi trouver que $g(x)=-10x+24$.

16. Réponse C. Plaçons la première couleur (notée 1 sur la figure) au centre du carré. Alors il faut utiliser deux autres couleurs sur une diagonale (2 et 3). Sur l'autre diagonale, il faut utiliser encore deux autres couleurs différentes (4 et 5). Alors, pour remplir les quatre dernières cases, il y a de nombreuses possibilités dont celle ci-contre. Pierre doit donc utiliser 5 couleurs au minimum.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | 4 |
| | 1 | |
| 5 | | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 1 | 2 |
| 5 | 2 | 3 |

17. Réponse C. En notant D le diamètre des tuyaux et P leur périmètre et en sommant les longueurs de ruban (découpé, pour le calcul, aux points de tangence), on trouve les longueurs suivantes :
 pour A et B, $P+6D$,
 pour C, $P+4D+L$, avec $L < 2D$
 (voir figure),
 pour D, $P+10D$.



C'est donc l'option C qui utilise le moins de ruban.
 Remarque : en entourant les tuyaux, pour chaque option, on tourne bien au total d'exactly un tour soit 360° . Les angles au centre pour les portions de rubans adhésifs sur les parties circulaires sont :
 $120^\circ, 120^\circ$ et 120° (pour A), $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ et 60° (pour B),
 $90^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ et 90° (pour C), 180° et 180° (pour D).

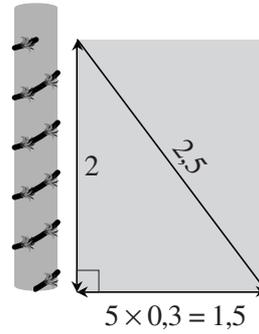
18. Réponse B. Le produit des neuf nombres est :
 $100 \times (50 \times 2) \times (25 \times 4) \times (20 \times 5) \times 10 = 10^9$.
 Si p est le produit de chaque ligne, colonne ou diagonale, on a, en multipliant ligne à ligne :
 $p^3 = 10^9$. D'où $p = 10^3 = 1000$.

| | | |
|----|-----|----|
| 20 | 1 | 50 |
| 25 | 10 | 4 |
| 2 | 100 | 5 |

Le nombre de la troisième case de la première ligne est donc 50.
 20×100 et 50×100 dépassant 1000, il n'y a alors qu'une place pour 100, au milieu de la troisième ligne. On place ensuite le 10 puis les autres nombres de manière unique (voir figure). Et c'est 4 qui est sur la case grisée.

19. Réponse B. Il y a trois angles droits (les 3 marqués à des sommets de la face arrière du cube) car chaque arête du cube est perpendiculaire aux faces opposées qu'elle joint (et donc à toute droite de ces faces). Le quatrième angle vaut 60° car c'est l'angle d'un triangle équilatéral formé de trois diagonales de face. La somme des quatre angles vaut donc $(3 \times 90^\circ) + 60^\circ$, soit 330° .

20. Réponse C. Si on déroule la surface du cylindre (le poteau), on obtient un rectangle dont la liane est la diagonale, la hauteur est celle du poteau (2 m) et la largeur est 5 fois la circonférence du poteau (5×30 cm, soit 1,5 m). Par le théorème de Pythagore (dans un triangle dont les côtés sont la moitié de ceux d'un triangle « 3, 4, 5 »), on obtient la longueur de la liane : 2,5 m.



21. Réponse E. Soient XY la distance entre X et Y (en km), v la vitesse du bateau par rapport à l'eau (en km/h) et c la vitesse du courant (en km/h). On a :

$$(v + c) \times 4 = XY = (v - c) \times 6.$$

$$\text{D'où } 4v + 4c = 6v - 6c, \quad v = 5c \text{ et } XY = 24c.$$

Le temps de parcours, à la vitesse du courant seul, est donc 24 heures.

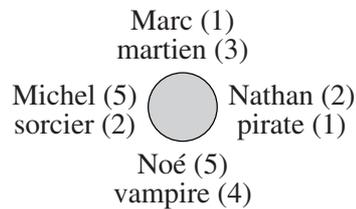
22. Réponse A. Nathan n'est pas en face de Marc sinon Michel et Noé ne seraient pas l'un à côté de l'autre.

Donc Nathan, qui est en face du sorcier, est le pirate (et assis à la gauche de Marc).

Marc ne peut pas être le vampire car le prénom de celui qui est assis à sa

gauche (Nathan) ne commence pas par M, donc Marc est le martien. Et le vampire est en face de Marc et c'est Michel (dont le prénom commence par M) qui est à sa gauche.

Le dessin montre les positions relatives autour de la table (l'ordre des numéros suivant le raisonnement ci-dessus). Michel est déguisé en sorcier.



23. Réponse B. Pour toute date du deuxième millénaire, le 2 sera utilisé pour le chiffre des milliers de l'année. Alors, le mois ne peut être ni 11 ni 12 et comportera un 0. Et le jour, sans utiliser ni 0 ni 2, comportera donc un 1. L'année la plus proche ne peut alors être que 2345, dans laquelle le mois le plus proche serait 06 avec 17 comme jour le plus proche. La prochaine date *surprenante* est donc le 17/06/2345.

Kangourou 2016 - Corrigé du sujet « J »

24. Réponse D. • P2015 a salué les 2015 autres participants.

• P2014 a salué 2014 autres participants, soit tous sauf un (qui est P1, qui a déjà salué P2015). Il a salué les autres participants à partir de P2.

• P2013 a salué 2013 autres participants, soit tous sauf deux (qui sont P1, qui a déjà salué P2015, et le P2 qui a déjà salué P2014 et P2015). Il a salué les autres participants à partir de P3.

De proche en proche...

• P1009 a salué 1009 participants, soit tous sauf les 1006 premiers, qui ont déjà leur compte de saluts (P1006 a salué les 1006 participants de P1010 à P2015). Il a donc salué tous les participants (sauf lui-même) à partir de P1007.

Et P1007 a salué les 1007 participants de P1009 à P2015.

• P1008 a salué les 1008 participants de P1009 à P2016.

Par réciprocité des saluts, P2016 a salué les participants P1008 à P2015, soit 1008 participants.

25. Réponse 0. $2016 \times d$ est un nombre de 2019 chiffres. En posant la multiplication, on obtient le nombre commençant par 4479 suivi de « 9 » et finissant par 9552 soit 44799...99552 avec au total 2013 fois le chiffre 9 au milieu. D'où $D = (9 \times 2013) + 27$.

$2016 \times t$ est un nombre de 2019 chiffres. En posant la multiplication, on obtient le nombre commençant par 6719 suivi de « 9 » et finissant par 9328 soit 67199...99328 avec au total 2013 fois le chiffre 9 au milieu. D'où $T = (9 \times 2013) + 27$.

On a donc $T - D = 0$.

26. Réponse 1. Voici la liste des jours fériés avec les nombres premiers en gras et les multiples de 6 en italique :

2-3 5-6-7 11-12-13 17-18-19 23-24 29-30-31 36-37 41-42-43 47-48.

Entre le 48 d'un mois et le 2 du mois suivant, il y a trois jours (les 49, 50 et 1^{er}). Le seul jour ouvrable coincé entre deux jours fériés est le 4.

© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 5 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »