KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1990 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions et demi de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une soixantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, films et logiciels pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2015 - Corrigé du sujet « C »

1. Réponse **B.** Les résultats sont successivement 7 (A), 2 (B), 6 (C), 5 (D) et 5 (E).

2. Réponse **B.** 10 cm est à la fois la longueur d'un petit rectangle et deux fois sa largeur. La longueur du grand rectangle étant la somme de deux largeurs et une longueur de petit rectangle vaut donc 2×10 cm, soit 20 cm.

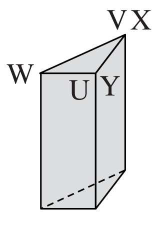
3. Réponse **C.** Le produit donné est de l'ordre de 2×500, soit 1000 et loin de 10 fois plus ou 10 fois moins.

4. Réponse **A.** Les paires de faces opposées sont $\{1;3\}$, $\{2;4\}$, et $\{5;6\}$. Les résultats obtenus par addition sont donc 4, 6 et 11.

5. Réponse **D.** 2014 est divisible par 2 mais pas par 4. $\frac{2014}{4}$ n'est donc pas un entier. Les quatre autres nombres proposés sont des entiers (pour C et E, utiliser les critères de divisibilité par 3 et 5).

6. Réponse **E.** Sur le dessin E, on voit la suite de lettres « OOK » qui est bien écrite dans cet ordre sur le parapluie. Pour A, C et D, une des lettres R, G ou N est écrite à l'envers. Pour B, le « R » est entre deux « O », ce qui n'est pas le cas dans KANGAROO.

7. Réponse **D.** L'arête [VW] se recolle sur [XW] et l'arête [UV] sur [YX].
Le prisme triangulaire est représenté ci-contre.

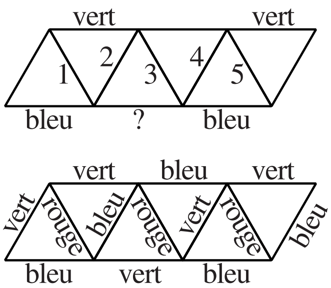


8. Réponse **E.** Comme l'écureuil ne s'éloigne pas à plus de 5 m du tronc de son arbre, c'est qu'il reste dans le disque de centre P et de rayon 5 m.
Comme il ne s'approche pas à moins de 5 m de la niche du chien, c'est qu'il reste à l'extérieur du disque de centre N et de rayon 5 m.

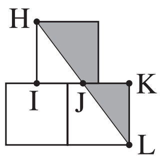
9. Réponse **D.** En une seconde le cycliste fait 5 m, soit 500 cm. Cela correspond à $\frac{500}{125}$, soit 4 périmètres de roue.
Chaque roue fait donc 4 tours par seconde et 20 tours en 5 secondes.

10. Réponse **B.** Le nombre maximum de garçons dans la classe est le nombre de jours dans une semaine, soit 7. Le nombre maximum de filles dans la classe est le nombre de mois dans l'année, soit 12. Au total, cela fait $7+12$, soit 19 élèves. Et dès qu'un élève, fille ou garçon, arrive en plus, une des deux conditions ne sera plus vraie.

11. Réponse **B.** Les segments 1 et 5 sur la figure ci-contre sont rouges car ils appartiennent à deux triangles qui ont déjà du bleu et du vert.
Le segment 2 est alors bleu et le segment 4 vert. Le segment 3 est donc rouge et le ? est vert ; et on peut compléter la figure comme ci-contre.

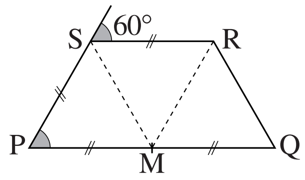


12. Réponse **A.** Avec les notations de la figure, HILK est un parallélogramme de centre J.
Les triangles JHI et JLK ont donc même aire.
L'aire grise est donc égale à celle du carré du haut, donc au tiers de l'aire totale.



13. Réponse **B.** Dans l'égalité fausse, le membre de gauche est égal à $2-22$, soit -20. L'égalité sera juste si le membre de gauche vaut 20 de plus, ce qu'on peut faire en ajoutant 10 au lieu de soustraire 10. Et le minimum de changements pour cela est 2, en changeant « – » en « + » devant deux des 5.

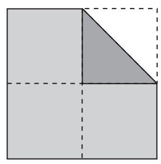
14. Réponse **E.** Soit M le milieu de [PQ]. $\widehat{RSP} = 120°$ donc son supplémentaire est égal à 60° et $\widehat{SPQ} = 60°$ puisque (SR)//(PQ). Le triangle SPM, isocèle en P avec $\widehat{SPM} = 60°$, est donc équilatéral. De plus $\widehat{MSR} = 60°$ et MSR est équilatéral. MRQ est donc aussi équilatéral et $\widehat{PQR} = 60°$.



15. Réponse **C.** La somme des nombres de points obtenus par les candidats est 6×100, soit 600. Ceux qui ont réussi totalisent 8×60, soit 480 points. Les 40 candidats qui ont échoué totalisent donc $600 - 480$ soit 120 points.

Leur moyenne est donc $\frac{120}{40} = 3$.

16. Réponse **C.** La différence entre l'aire du carré est celle du pentagone est égale à la moitié du quart de l'aire du carré (voir figure), soit au huitième du carré.
Cette différence valant 1, l'aire du carré vaut 8.

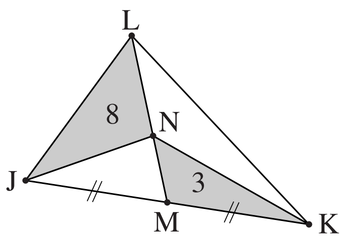


17. Réponse **D.** Il est tombé, par m^2, 15 litres ou 15 dm^3 ou 0,015 m^3. Le niveau de l'eau est donc monté de 0,015 m, soit 1,5 cm.

18. Réponse **B.** Soit $\mathscr{L}$ et ℓ les longueur et largeur du rectangle. On a, en cm, $2\mathscr{L} + \ell = 44$ et $\mathscr{L} + 2\ell = 40$. D'où, en ajoutant membre à membre : $3(\mathscr{L} + \ell) = 84$.

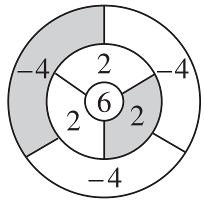
Et le périmètre du rectangle est $2(\mathscr{L} + \ell) = \frac{2}{3} \times 84$, soit 56 (en cm).

19. Réponse **C.** Une médiane partage un triangle en deux triangles d'aires égales. M étant le milieu de [JK], les triangles LMJ et LMK ont même aire, de même que NMJ et NMK.
Les triangles LMJ et LMK ont donc chacun une aire de 11 cm^2.
Et le triangle JKL a une aire de 22 cm^2.



20. Réponse **A.** Le poids pour le reste du groupe, en dehors des 3 les plus lourds et des 2 les plus légers représente $100\% - 60\% - 25\%$, soit 15% du poids total. Ces 15% étant inférieurs au poids des deux plus légers, ce ne peut être que le poids d'un seul kangourou. Et il y a donc en tout, $3 + 2 + 1$, soit 6 kangourous.

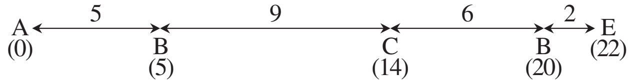
21. Réponse **E.** À part la région centrale qui ne lui est pas voisine, la région avec -4 a les mêmes voisins que la région avec 2 (grisées ci-contre). Donc, en appelant x le nombre de la région centrale, on a $-4+x=2$. D'où $x=6$.
(Le dessin avec les 7 nombres est montré ci-contre.)



22. Réponse **C.** Dans les divisions de Marie, le dividende est 2015. Si le diviseur est 1000, le quotient est 2 et le reste 15. En diminuant le diviseur, le quotient demeure égal à 2 et le reste augmente ; cela jusqu'à ce que le diviseur soit 672 avec $2015=(672\times 2)+671$.
Ainsi avec des diviseurs entre 672 et 1000, le reste le plus grand est 671.
Et avec des diviseurs entre 1 et 671, le reste est inférieur à 671 puisqu'inférieur au diviseur.
Le plus grand reste obtenu par Marie est donc 671.

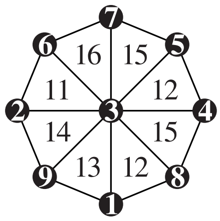
23. Réponse **C.** Si les 5 cartes portaient des nombres différents a, b, c, d, e, alors les 4 nombres $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, seraient aussi différents ; or il n'y a que 3 valeurs possibles.
Il y a donc 2 cartes portant le même nombre a. Et $a+a$ vaut 70 (seul résultat pair). Donc $a=35$.
Deux autres cartes portent donc les nombres $b=57-35=22$ et $c=83-35=48$.
La dernière carte ne peut alors que porter 35 (si elle porte un autre nombre, alors sa somme avec 35 ou avec 22 ou avec 48 serait un autre nombre que 70, 57 ou 83). Les 5 cartes portent donc 35, 35, 35, 22 et 48. Et le plus grand des cinq est 48.

24. Réponse **E.** Plaçons les 5 points sur un axe gradué en plaçant d'abord les deux points les plus éloignés : A d'abscisse 0 et E d'abscisse 22.
Après 22, la plus grande distance est 20, ainsi un 3ème point doit avoir pour abscisse 20 ou 2 ; les cas étant symétriques, choisissons D (20).
Pour chacun des deux derniers points, la somme des deux distances aux points extrêmes doit valoir 22 ; examinons les possibilités :
- 5 et 17 peuvent être ces deux distances ;
- 6 et 16 ne peuvent pas (puisque la distance 16 n'est pas dans la liste) ;
- 8 et 14 si $k=14$;
- 9 et 13 si $k=13$.
Il n'y a pas d'autre possibilité avec la liste des distances donnée.
Le dernier cas est impossible car un point placé en 9 ou 13 serait à 11 ou 7 du point D (et 11 et 7 ne sont alors pas dans la liste).
Restent deux possibilités et deux points, donc le nombre k ne peut valoir que 14 ; et voici comment se placent les points :



25. Réponse **6.** Si 1 et 2 sont rouges alors 3 (égal à $2+1$) sera rouge, ainsi que 4 (égal à $3+1$) et 5 (égal à $4+1$).
Si 1 est rouge, 2 bleu et 3 rouge, alors 4 (égal à $3+1$) est rouge et 5 (égal à $4+1$) est rouge aussi.
Si 1 est rouge, 2 bleu et 3 bleu, alors 5 (égal à $2+3$) est bleu et 4 est bleu aussi car sinon 5 (égal à $4+1$) devrait être rouge.
Cela fait 3 coloriages possibles si 1 est rouge.
De même si 1 est bleu, on trouvera 3 autres coloriages.
Au total, il y a 6 manières de colorier les cinq nombres.

26. Réponse **4.** Si on fait la somme des huit triangles on obtient :
$12+15+16+11+14+13+12+15=108$.
On a alors compté 8 fois le nombre du centre (c) et 2 fois chaque autre nombre, c'est-à-dire 2 fois chaque nombre et 6 fois c.
D'où : $108=2\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+6c$.
$c=\dfrac{108-2\times45}{6}=3$.



Alors, la somme pour un triangle avec 1 est au maximum $3+1+9$, soit 13. Il n'y a que deux triangles côte à côte avec deux nombres ne dépassant pas 13 donc une seule place pour le 1. Les autres nombres se trouvent alors de proche en proche (et sont écrits dans la figure ci-contre).