**KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES**
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
**www.mathkang.org**

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991 en France, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions et demi de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une soixantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2014 - Corrigé du sujet « S »

**1.** Réponse **B.** Pour tout réel $x$, $F(x) = 671x$ et $F(3) = 671 \times 3 = 2013$.

**2.** Réponse **C.** Un nombre de deux chiffres identiques est un multiple 11. Dans $n$ années, la somme des âges sera $3n + 44$ qui doit être multiple de 11. $n$ doit donc être aussi multiple de 11. Seul $n = 11$ est possible et dans 11 ans, la somme des âges sera 77.

**3.** Réponse **C.** Le nombre de cubes au départ est $5 \times 5 \times 5 = 125$.
Il reste le socle (de $5 \times 5$ cubes) et 9 colonnes de hauteur 4.
Le nombre de cubes enlevés est donc $125 - 25 - 36 = 64$.

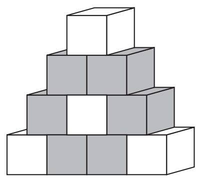
**4.** Réponse **E.** $2^{2014} - 2^{2013} = 2 \times (2^{2013} - 2^{2012})$.

**5.** Réponse **C.** Soient $x$ le nombre de balles de la corbeille bleue. Alors $2x$ est le nombre de balles de la corbeille blanche et $4x$ celui de la bleue et la rouge ensemble. Au total il y a $6x$ balles et $x = 48 \div 6 = 8$. Il y a donc 8 balles dans la corbeilles bleue, 16 dans la blanche et 24 dans la rouge.

**6.** Réponse **C.** 2014 est le premier *mégapyge* commençant par « 201 ». Un mégapyge ne peut pas commencer par « 200 » (il ne peut avoir deux fois le chiffre 0), ni par « 19 » (le dernier chiffre devrait dépasser 10), ni par « 18 » (le dernier chiffre devrait être strictement plus grand que 9). Si on commence par « 17 », le dernier chiffre doit être 9 et l'avant dernier 0 : la précédente année mégapyge est donc1709. Et $2014 - 1709 = 305$.

**7.** Réponse **E.** $2b+2=2(b+1)$. $b^2-1=(b+1)(b-1)$.
$b^2+b=b(b+1)$. $-1-b=(-1)(b+1)$.
On ne peut pas mettre $(b+1)$ en facteur dans $b^2+1$ car alors $(-1)$ serait solution de $b^2+1=0$, or $(-1)^2+1=2$.

**8.** Réponse **A.** Si un cube rouge est à la place de l'un quelconque des cubes grisés ci-contre, alors les 4 cubes qu'il touche ne peuvent être rouges et il est alors impossible de placer les 3 autres cubes rouges aux 5 places restantes sans que 2 ne se touchent. Les 4 cubes rouges sont donc aux 4 emplacements en blanc sur la figure (et il y a plusieurs manières de placer les autres cubes). Le cube placé au milieu est donc rouge.

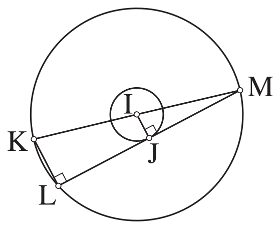


**9.** Réponse **E.** $(2^{22})^5 \times (5^{55})^2 = 2^{110} \times 5^{110} = 10^{110}$, qui s'écrit « 1 » suivi de 110 zéros donc avec 111 chiffres.

**10.** Réponse **D.** Doubler la circonférence de la base multiplie par 4 l'aire de cette base. Le volume étant proportionnel à l'aire de la base, il est multiplié lui aussi par 4.

**11.** Réponse **A.** Soit $x$ la quantité dont on augmente $a$, ou $b$, ou $c$. Le volume, qui est $abc$, augmente de $xbc$ si c'est $a$ qu'on augmente, de $xac$ si c'est $b$ et de $xab$ si c'est $c$.
$b$ et $c$ étant plus grand que $a$, l'augmentation la plus grande est $xbc$, qui se produit quand on augmente $a$.

**12.** Réponse **B.** Soit J le point de contact de la corde LM et du petit cercle. Soit I le centre commun aux deux cercles. Alors (IJ) est orthogonal à (LM). Comme KLM est inscrit dans un cercle de diamètre [KM], l'angle $\widehat{KLM}$ est droit. Les droites (IJ) et (KL), orthogonales à une même droite, sont parallèles.




Le théorème de Thalès donne KL = 2 IJ. D'où IJ = 6.
Le rayon du grand cercle est IM = 3 IJ = 18.

**13.** Réponse **A.** $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. La somme des 4 nombres sur une face est donc $36 \div 2$, soit 18. Ainsi, le quatrième sommet de la face de devant porte le 7. Restent à placer 2, 3, 5 et 8. Sur la face qui contient l'arête 7—4 (face de droite), on ne peut mettre que 5 et 2 (pour avoir 18 comme somme).
Et, alors, sur la face qui contient l'arête 6—7 (face du haut), on ne peut mettre que 2 et 3.
Le sommet *X* est donc occupé par 2.

**14.** Réponse **D.** Six semaines, c'est $6 \times 7 \times 24 \times 60 \times 60$ secondes. Ce nombre n'est pas divisible par 11, donc $n < 11$.
En décomposant et recomposant habilement :

$$\begin{aligned} 6 \times 7 \times 24 \times 60 \times 60 &= 6 \times 7 \times (3 \times 8) \times (5 \times 4 \times 3) \times (2 \times 3 \times 10) \\ &= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times (3 \times 3) \times 10 \\ &= 10\,! \end{aligned}$$

**15.** Réponse **E.** Le dessin A est la vue de devant (ou de derrière). B est la vue de droite (ou de gauche). C est la vue de dessus (ou de dessous). D est la même que C. Le dessin E ne correspond à aucune vue du cube.

**16.** Réponse **E.** Comme $7+5=12$ et que l'ensemble ne contient que 10 nombres, c'est qu'il y a au moins deux nombres divisibles à la fois par 5 et par 7, donc par 35. Par conséquent, dans les dix entiers, l'un d'entre eux est au moins égal à 70. Inversement, le choix 35, 70, 5, 10, 15, 7, 14, 21, 28, 42 convient. Donc la solution est 70, qui ne figure pas dans les quatre premières réponses proposées.

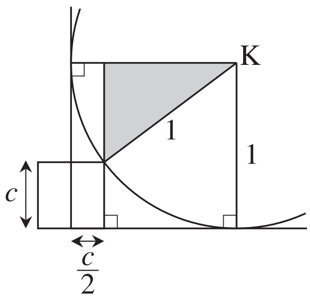
**17.** Réponse **B.** Soient $e$, $g$ et $a$ les pourcentages respectifs d'eau, de matière grasse et de matière sèche non grasse.
On a : $e+g+a=100$ ; $g=24$ et $g=\dfrac{75}{100}(g+a)$.
La dernière égalité donne $g=3a$. D'où $a=8$ et $e=68$.
Il y a 68 % d'eau dans le fromage.

**18.** Réponse **D.** $f(1)=a+b$ et $f(f(1))=f(a+b)=a^2+ab+b=21$.
$f(0)=b$ et $f(f(0))=f(b)=ab+b=5$.
Par soustraction $a^2=16$. Comme $f$ est croissante, $a$ est positif et vaut 4.

**19.** Réponse **C.** $\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{m}$ et $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}>1$ ; donc $\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{3}$ et $p=2$.
Alors $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2}$ d'où $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{4}$ et $n=3$.
Il n'y a alors que 2 valeurs qui conviennent pour $m$ :
$m=4$ et $m=5$. $\left(\text{Pour } m=6, \text{ on aurait } \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=1\right)$.

**20.** Réponse **D.** $54 = 2 \times 3^3$.
Entre 1 et 100, il y a 33 multiples de 3. Si Tom n'en prend que 2, non pairs et non multiples de 9 (comme 3 et 15), il peut prendre tous les autres nombres non multiples de 3. Il ne laisse alors que 31 nombres et peut en prendre 69.
69 est le maximum cherché car, si Tom prend 3 multiples de 3, alors il ne peut pas prendre de multiple de 2. Et, en ne prenant aucun des 50 multiples de 2, Tom prendrait alors 50 nombres au plus.

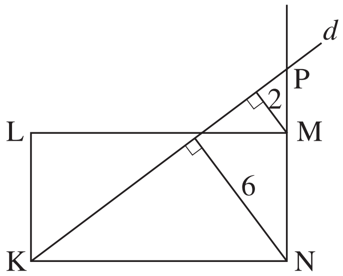
**21.** Réponse **A.** Le dessin ci-contre reprend les données de l'énoncé. On a appelé K le centre du cercle de droite, $c$ le côté du carré et indiqué les perpendicularités aux points de tangence.




Dans le triangle rectangle grisé, on a : $\left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 + (1 - c)^2 = 1^2$. Ce qui donne $\frac{5}{4}c^2 - 3c + 1 = 0$ de racines 2 et $\frac{2}{5}$. Le côté du carré est donc $\frac{2}{5}$.
Remarque : en se plaçant dans le repère orthonormé dans lequel le cercle de centre K a pour équation $x^2 + y^2 = 1$ et en considérant le point du cercle $(-1 + \frac{c}{2}\,;\, -1 + c)$, on retrouve la même équation.

**22.** Réponse **D.** Par hypothèse, $u_4 = 6 = 3 \times 2 \times 1$.
En utilisant 3 fois la relation de récurrence, on trouve pour tout $n \geqslant 4$ :
$u_{n+3} = \frac{(n+2)\,(n+1)\,n}{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}\;u_n$.
En particulier : $u_7 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}u_4 = 6\times5\times4$ et $u_{10} = \frac{9\times8\times7}{6\times5\times4}u_7 = 9\times8\times7$,
et ainsi de suite, … , jusqu'à $u_{2014} = 2013 \times 2012 \times 2011$.
Le produit des $u_n$ de 3 en 3 de $u_4$ à $u_{2014}$ est donc le produit des entiers de 1 à 2013 soit 2013 ! (remarque : la notation factorielle a été rappelée dans l'énoncé de la question 14).

**23.** Réponse **E.** Une « rencontre » entre 3 kangourous est un ensemble de 3 kangourous.
Le nombre total de « rencontres » possibles est $\frac{9\times8\times7}{3\times2}$.
Soit $k$ le nombre de kangourous dorés ; le nombre total de « rencontres » possibles avec uniquement des kangourous dorés est $\frac{k\times(k-1)\times(k-2)}{3\times2}$.
La probabilité que deux kangourous dorés se rencontrent est donc :
$\frac{k\,(k-1)\,(k-2)}{9\times8\times7} = \frac{2}{3}$. D'où $k\,(k-1)\,(k-2) = 8\times7\times6$ et $k = 8$.




**24.** Réponse **A.** Soit P le point d'intersection de $d$ et de (NM).
On a $\frac{\text{PM}}{\text{PN}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
Posons PM$=x$. Alors PN$=3x$ ;
MN$=2x$ et, puisque KN$=2$ KL,
KN$=4x$. D'où :
KP$=5x$ (par Pythagore dans PKN)
Or $\sin\widehat{\text{K}}=\frac{6}{\text{KN}}=\frac{\text{PN}}{\text{KP}}$.
Ce qui donne $\text{KN}=6\times\frac{\text{KP}}{\text{PN}}=6\times\frac{5x}{3x}=10$.

**25.** Réponse **5.** L'équilibre ne peut avoir lieu que s'il ne reste qu'une seule espèce (s'il y a deux espèces, l'une peut toujours être mangée). On constate qu'à chaque manger, la parité du nombre de chaque espèce change, et donc les deux espèces qui vont disparaître ont toujours la même parité : vu les nombres initiaux, ce ne peut être que les chèvres et les loups. Et il ne reste que des lions à la fin.
Il y a au début 14 animaux ; 1 manger (quelconque) fait baisser le nombre total d'animaux de 1 ; comme il y a 9 loups à éliminer, il ne pourra rester qu'au plus $14-9$, soit 5 animaux à la fin. Et voilà comment finir avec 5 lions, ce qui est donc le maximum cherché :
- 3 loups mangent 3 chèvres, on a alors 5 lions et 6 loups ;
- 3 lions mangent 3 loups, on a alors 2 lions, 3 loups et 3 chèvres ;
- 3 loups mangent 3 chèvres, on a alors 5 lions (et ni loup ni chèvre).
(Remarque : pour atteindre ce maximum de 5 lions, un lion ne doit jamais manger une chèvre.)

**26.** Réponse **2.** Si $k=1024^{\frac{1}{n}}+1$ est entier, alors $1024^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{10}{n}}$ est un entier, et $n$ divise donc 10.
Si $n=1$, $2014+m > 2014 > 1024+1$ ; pas de solution.
Si $n=2$, $\sqrt{2014+m} > 40 > \sqrt{1024}+1$ ; pas de solution.
En revanche, si $n=5$ ou $n=10$,
$\left(1024^{\frac{1}{n}}+1\right)^n$ est un entier strictement supérieur à 2014 ; et cela donne dans chaque cas un unique triplet. Il y a donc deux triplets solutions.