

## KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)

Tél. : 01 43 31 40 30

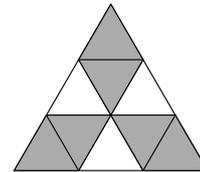
[www.mathkang.org](http://www.mathkang.org)

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

### Kangourou 2013 - Corrigé du sujet « C »

1. Réponse **B**.  $2013 - 810 = 1203$ .

2. Réponse **D**. La figure peut être décomposée en 9 triangles équilatéraux de même aire. L'aire du grand triangle étant 9, l'aire de chaque petit triangle est 1. La partie grisée, composée de 6 petits triangles, a pour aire 6.

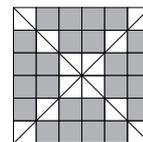


3. Réponse **C**. Deux cahiers s'échangent contre 6 crayons ce qui correspond à 3 règles ( $6 = 2 \times 3$ ).

4. Réponse **E**. Le nombre écrit a au moins deux chiffres.  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ . Pour obtenir 24 comme produit de deux chiffres, les seules possibilités sont  $3 \times 8$  et  $4 \times 6$ . Les nombres correspondants sont 38, 83, 46 et 64. Le plus petit est 38 et la somme de ses chiffres est 11.

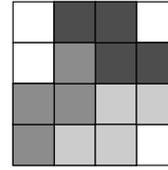
5. Réponse **D**. La moyenne des deux nombres est 2013, leur somme est donc 4026. Le nombre cherché est donc  $4026 - 1013$ , soit 3013.

6. Réponse **D**. Dans un carré  $6 \times 6$ , les diagonales passent par des sommets des cases (figure ci-contre). Sur les 36 cases, 12 sont coupées par les diagonales et 24 ne le sont pas ( $24 = 6 \times 4$ ).



7. Réponse **E**. Il y a 5 couleurs différentes. En tirant 6 balles, on a donc la certitude d'avoir au moins deux balles de la même couleur.

**8. Réponse C.** Si un morceau contient un carreau d'un coin du carré de papier, il n'y a que deux manières pour découper ce morceau et aucune ne permet alors d'utiliser tous les carreaux. On ne peut donc pas utiliser tout le papier et on obtiendra, au maximum, 3 morceaux. Ce qui est faisable (voir figure). Il restera donc, au minimum, 4 carreaux inutilisés.



**9. Réponse C.** Au bout de 55 minutes, Alex aura allumé 6 bougies (aux temps 0, 10, 20, 30, 40 et 50 minutes). Les deux premières se seront éteintes (aux temps 40 et 50 minutes). Il y en aura donc 4 d'allumées.

**10. Réponse B.**  $\frac{3333}{101} = 3 \times \frac{1111}{101} = 33$ . Et  $\frac{8888}{202} = \frac{8}{2} \times \frac{1111}{101} = 44$ .  
La somme est donc égale à 77.

**11. Réponse E.** En vue de dessus, la base de la pyramide est un carré correspondant à la base du cube, le sommet S est au milieu de [OP] et on voit les arêtes [SM] et [SL]. La figure E est donc une vue de dessus de l'objet.

**12. Réponse A.** Lorsque Lisa aura fait 4 tours, Mona en aura fait 4 fois  $\frac{9}{8}$ , soit 4,5. Elle aura donc rattrapé Lisa qui avait un demi-tour d'avance sur elle.

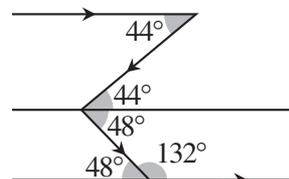
**13. Réponse E.** De devant, les piles sont alignées quatre à quatre selon les colonnes de la vue de dessus. Et on voit, dans chaque alignement, la même chose que s'il n'y avait que la pile la plus haute. De gauche à droite, les nombres les plus grands de chaque colonne sont 4, 3, 3 et 2. Ce sont les hauteurs vues de devant, comme en E.

**14. Réponse C.** Dans une suite de nombres entiers consécutifs, il ne peut y avoir qu'un écart égal à 0 ou à 1 entre le nombre d'entiers pairs et le nombre d'entiers impairs. Les proportions de nombres impairs et pairs pour chaque résultat donné seraient :

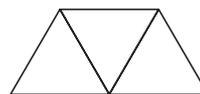
$\frac{2}{5}$  et  $\frac{3}{5}$  (A),  $\frac{3}{7}$  et  $\frac{4}{7}$  (B),  $\frac{4}{11}$  et  $\frac{7}{11}$  (C),  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$  (D),  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{2}{5}$  (E).

Il n'y a que pour C où l'écart est trop grand (4 impairs pour 7 pairs).

**15. Réponse E.** Les trajectoires initiale et finale sont parallèles ; il faut penser à introduire une autre droite parallèle (voir figure). On utilise alors les propriétés des angles alternes-internes pour des droites parallèles coupées par une sécante ( $48^\circ$  étant le supplémentaire de  $132^\circ$ ). L'angle cherché est égal à  $44^\circ + 48^\circ$ , soit  $92^\circ$ .

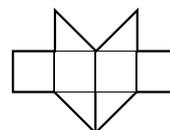


**16. Réponse B.** Les longueurs des côtés du trapèze étant des entiers, la seule possibilité est 2 pour la base et 1 pour les 3 autres longueurs. Ce trapèze, comme sur la figure, peut être découpé en 3 triangles équilatéraux. Les deux plus petits angles sont donc tous les deux égaux à  $60^\circ$ .

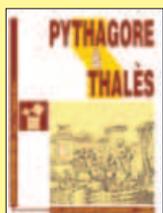


**17. Réponse A.** Les plus petits et plus grands de ces nombres pour chaque millier sont : 1023 et 1320 ; 2013 et 2310 ; 3012 et 3210. Les écarts dans un même millier sont tous inférieurs à 300. Les écarts les plus grands s'observent donc aux changements de milliers :  
- entre 2013 et 1320, la différence est 693 ;  
- entre 3012 et 2310, la différence est 702.  
Le plus grande différence possible est donc 702.

**18. Réponse C.** Pour chacun des patrons, les quatre carrés entiers forment une couronne de quatre faces. De chaque côté (haut et bas de chaque patron) doivent se reformer chacune des deux autres faces du cube (qui sont opposées). C'est la partie inférieure du patron C qui n'est pas correcte : les deux demi-carrés se superposent si l'on replie le patron (il en serait de même avec le patron ci contre, équivalent au patron C, mais où la couronne est coupée transversalement selon une autre arête).



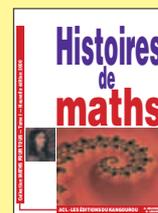
**19. Réponse B.** André et Eddy sont nés le même mois, donc en mars ou en avril. Même chose pour Boris et Cyril. André et Cyril sont nés le même jour dans des mois différents. Étant tous les deux nés en mars ou avril, leurs deux dates de naissance sont le 12 mars 2000 et le 12 avril 2000. Dan est forcément né le 20 février 2001 (les 4 autres sont nés en mars et avril). Donc Eddy est né le 20 mars 2001. On en déduit que Boris est né le 23 avril 2001 et que c'est donc le plus jeune des cinq.



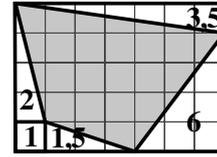
Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5<sup>e</sup>

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :

<http://www.mathkang.org/catalogue/>



**20. Réponse B.** Pour déterminer l'aire du quadrilatère, il suffit de soustraire à l'aire du rectangle les aires de 4 triangles et celle d'un petit carré (voir figure).



En carreaux, la somme de ces aires vaut :

$$3,5 + 6 + 1,5 + 1 + 2 = 14.$$

Et l'aire du rectangle de 7 carreaux sur 5 vaut 35.

L'aire du quadrilatère JKLM est donc  $35 - 14$ , soit 21 carreaux.

Chaque carreau a pour aire  $4 \text{ cm}^2$ , donc JKLM a pour aire  $84 \text{ cm}^2$ .

**21. Réponse B.** La suite des nombres s'écrit :

1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, ...

La somme de trois nombres consécutifs est -1.

2013 est un multiple de 3.  $2013 = 671 \times 3$ .

La somme des 2013 premiers termes de la suite est donc -671.

**22. Réponse D.** Si la première crêpe mangée est la numéro 4, la crêpe numéro 3 devra être mangée avant la 2, ce qui n'est pas le cas dans la séquence D. (Les autres ordres proposés sont possibles. E est la situation où toutes les crêpes ont été empilées avant de commencer à être mangées. A est la situation où elles ont été mangées au fur et à mesure de leur fabrication.)

**23. Réponse B.** André a fini 21<sup>e</sup>; il y a donc 20 participants avant lui. Il y a donc  $1,5 \times 20$ , soit 30 participants derrière Daniel à l'arrivée. Si on appelle  $n$  le nombre de participants devant Daniel à l'arrivée, alors il y en a  $2n$  derrière André à l'arrivée.

En écrivant de deux manières le nombre de participants à l'arrivée, on obtient :  $30 + 1 + n = 2n + 1 + 20$ . D'où  $n = 10$ .

Il y a donc 41 participants à l'arrivée de ce marathon.

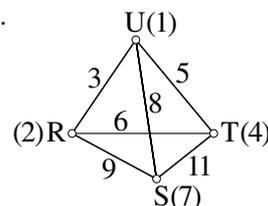
On peut vérifier qu'il y a 20 participants devant André et 20 derrière ; et 10 participants devant Daniel et 30 derrière.

**24. Réponse B.** Les trois plus grands nombres (8, 9 et 11) sont associés à des arêtes car, si l'un était associé à un sommet, une des trois arêtes partant de ce sommet porterait un nombre inférieur au sommet, ce qui est impossible.

Les trois sommes de deux arêtes opposées sont égales puisque chacune est égale à la somme des 4 sommets. Et donc chacune est égale au quart de la somme totale. La somme totale est 56, donc la somme de deux arêtes opposées, comme [RS] et [TU] est  $56 \div 4$ , soit 14.

9 étant sur [RS], c'est 5 qui se trouve sur [TU].

Voici le seul tétraèdre possible :



**25. Réponse 1.** Soit  $d$  le nombre de neuf chiffres de départ, et  $n$  celui de huit chiffres. Si le chiffre effacé de  $d$  n'est pas celui des unités, alors  $d$  et  $n$  auront le même chiffre des unités et leur somme sera un nombre pair, ce qui n'est pas cas. Donc, le chiffre effacé par Kangy est le chiffre des unités de  $d$ . Appelons  $u$  ce chiffre ( $0 \leq u \leq 9$ ), de sorte que  $d = 10n + u$ . D'où  $d + n = 11n + u = 979797979$ .  $(979797979 - u)$  est un multiple de 11 ; il vaut donc  $979797973$  et  $u = 6$ . En posant l'addition ou en divisant par 11, on trouve  $n = 89\,072\,543$  et  $d = 890\,725\,436$ . Le chiffre cherché est 1.

**26. Réponse 9.** Le chiffre des unités d'une somme est le même que celui de la somme des chiffres des unités des nombres.  $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2$  ont respectivement pour chiffre des unités 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0. Leur somme a pour unité 5. Alors la somme  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2009^2 + 2010^2$  a pour chiffre des unités celui de  $5 \times 201$ , soit 5 aussi. Le chiffre des unités de  $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2) + 2011^2 + 2012^2 + 2013^2$  est donc celui de  $5 + 1 + 4 + 9$ , soit 9.

© Art Culture Lecture - les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 5 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »