KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

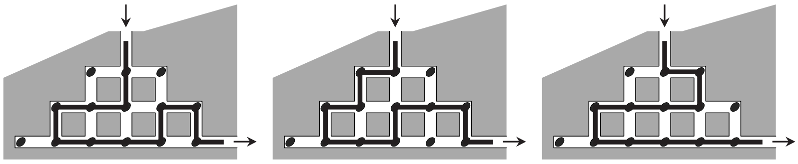
Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 6 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2011 - Corrigé du sujet « J »

1. Réponse **B.** Les résultats, dans l'ordre, sont : 0, 13, – 9, 2 et 2.

2. Réponse **A.** Alain faisait baisser la moyenne de l'équipe. Quand il la quitte, cette moyenne augmente.

3. Réponse **B.** Jerry ne peut pas prendre le morceau en bas à gauche de la figure (elle ne pourrait plus bouger sans repasser sur son chemin). Dès le départ, après avoir pris son premier morceau, si Jerry continue tout droit, elle ne pourra plus revenir prendre aucun des deux morceaux laissés à droite ou à gauche et elle en laissera alors trois au minimum (voir la première figure ci-dessous). Si, après avoir pris son premier morceau, Jerry part à droite ou à gauche, elle créera une impasse de l'autre côté ; ensuite, elle ne pourra pas parcourir les deux lignes de 5 morceaux (l'une sur l'autre en bas) sans laisser un morceau de côté ; elle laisse alors aussi 3 morceaux au minimum.
Dans tous les cas Jerry laisse donc 3 morceaux au minimum et ne peut en manger que 14 – 3 soit 11 au maximum. Voici 3 exemples de chemin où elle peut manger 11 morceaux de fromages :



4. Réponse **D.** Le passage comporte 17 bandes (8 blanches et 9 noires) ; sa largeur totale est donc de $0{,}5 \times 17$, soit 8,5 m.

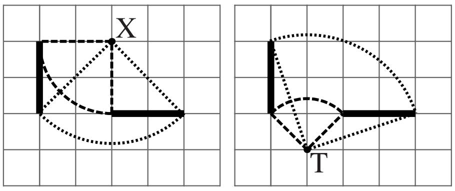
5. Réponse **C.** Par découpage et recollement judicieux des 2 petits triangles blancs, on transforme le trapèze en rectangle, double du rectangle grisé. L'aire du trapèze est donc 2×13 cm^2, soit 26 cm^2.

6. Réponse **D.** On voit que $R < Q$ et $Q < P$ (ce sont des sommes de 3 termes qu'il est facile de comparer terme à terme). Donc $R < Q < P$.

7. Réponse **A.** Lorsque deux segments sont adjacents, les nombres placés à leurs extrémités sont égaux (puisqu'on doit trouver la même somme en ajoutant chacun au nombre « central »). Les nombres aux extrémités d'un chemin de longueur paire sont donc égaux ; donc 1 doit être à la place de x.

8. Réponse **E.** Dans la division, on a : $2011 = bq + r$ avec $r < b$. Nicolas a trouvé $r = 1011$; ce qui impliquerait $bq = 1000$; mais alors le reste r serait supérieur au diviseur b ; Nicolas s'est donc trompé.

9. Réponse **C.** Avec pour centre X ou T, une rotation d'angle 90° transforme un segment en l'autre. Les points Y et Z ne peuvent pas être des centres de rotation qui conviennent, leur distance aux extrémités des 2 segments n'étant pas les mêmes.



10. Réponse **E.** Les nombres d'une dizaine avec un chiffre impair comme chiffre des dizaines (de 30 à 39 par exemple) forment une suite de 10 nombres. En lui adjoignant le nombre précédent qui a un 9 au chiffre des unités (29 dans l'exemple), on forme une suite de 11 nombres entiers consécutifs ayant la propriété demandée. C'est le maximum cherché car on ne peut avoir plus de 11 entiers dans les intervalles laissés par les nombres pairs 20, 28, 40, 48, 60, 68, 80 et 88.

11. Réponse **C.** La largeur de la mosaïque, en cm, est $\frac{360}{24}$, soit 15.

Le côté d'un carreau mesure donc $\frac{15\text{ cm}}{5}$, soit 3 cm ; et son aire 9 cm^2.

12. Réponse **C.** Les rues de Carole et de Benoît se coupent deux fois ; l'une d'elles n'est donc pas une droite. De même pour celles d'Ambre et de Carole. C'est donc celle de Carole qui n'est pas une droite.

13. Réponse **C.** Les deux côtés d'un triangle, qui sont aussi des côtés de carré, ont même longueur 1 et forment un angle de $360° - 120° - (2 \times 90°)$ soit 60°. Donc les triangles de la figure sont équilatéraux. Donc tous les segments tracés ont pour longueur 1. Et le périmètre de la figure, un dodécagone, est donc 12.

14. Réponse **D.** Il est en neuvième place, derrière 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101 et 2020.

15. Réponse **B.** Un nombre pair de dépassements mutuels ne change pas l'ordre entre 2 coureurs, un nombre impair de dépassements l'inverse. L'ordre est inversé entre Michel et Fernand et entre Michel et Sébastien mais pas entre Fernand et Sébastien.
Avec M, F, S comme ordre de départ, on a donc F, S, M comme ordre d'arrivée.

16. Réponse **D.** En appelant S la somme cherchée et en ajoutant les 4 sommes égales à 10 des quatre carrés 2×2, on ajoutera 4 fois le centre 2, 2 fois S et une fois chaque nombre des sommets de la grille : $4 \times 10 = (4 \times 2) + 2S + (1 + 0 + 4 + 3)$. D'où $S = 12$. (Plusieurs grilles sont possibles.)

Un exemple de grille :

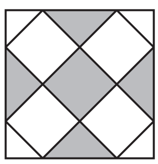
1	7	0
0	2	1
4	4	3

17. Réponse **A.** $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$. Et $4^n + 4^n = 2 \times 2^{2n} = 2^{2n+1}$.
Donc $2n + 1 = 2011$ et $n = 1005$.

18. Réponse **C.** Si V est le volume du petit cube, le volume du grand est 8V. On a, en litres, $8V - V = 56$, soit $7V = 56$ et $V = 8$.

19. Réponse **E.** $(a+1)bcde = abcde + bcde$.
$a(b+1)cde = abcde + acde$.
$ab(c+1)de = abcde + abde$.
$abc(d+1)e = abcde + abce$.
$abcd(e+1) = abcde + abcd$.
Le plus petit des 5 résultats est celui où les facteurs du second terme sont les plus petits. C'est donc e qu'il faut augmenter de 1.

20. Réponse **C.** Chaque face du cube peut se découper en 5 carrés, 4 demi-carrés et 4 quarts de carré (voir figure ci-contre). Sur chaque face, la partie grisée représente les 3/8 de cette face, soit 37,5 cm^2. Et la surface totale grisée est, en cm^2, $6 \times 37{,}5$ donc 225.



21. Réponse **B.** A, C et E sont plus petits que $\frac{x}{y}$ tandis que B et D sont plus grands.

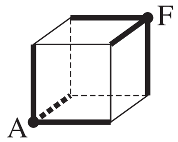
$B = \frac{2x}{2y-2}$ et $D = \frac{2x}{2y-1}$:

B ayant le plus petit dénominateur, est le plus grand.

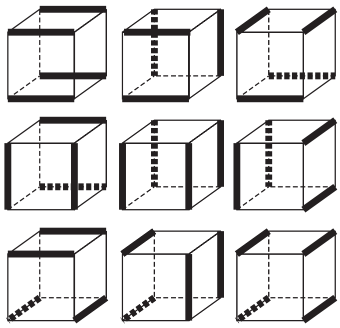
22. Réponse **D.** Le « certain » mois dont on parle a 31 jours et commence un lundi. S'il était précédé d'un mois de 30 jours, ce mois, se terminant un dimanche, posséderait 5 dimanches. Comme il n'en possède que 4, c'est qu'il a moins de 30 jours. C'est le mois de février. Le « certain » mois est mars et le suivant est avril.

23. Réponse **A.** 49999 et 50000 sont deux nombres de la liste séparés de 1. L'écart ne peut pas être plus petit.

24. Réponse **D.** Un quadruplet d'arêtes n'ayant aucune extrémité commune utilise les 8 sommets du cube pour extrémités.

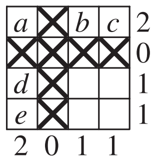


Soient deux sommets A et F sur une diagonale du cube : chacun sera l'extrémité d'une arête choisie différente.



Cela fait donc 3×3, soit 9 possibilités de choix des deux arêtes ayant A ou F comme extrémité. Et pour chaque choix, il y a une unique manière de choisir les deux autres arêtes pour ne pas avoir d'extrémité commune (voir figure ci-contre avec des mêmes choix en ligne pour A et en colonne pour F). La réponse est donc 9.

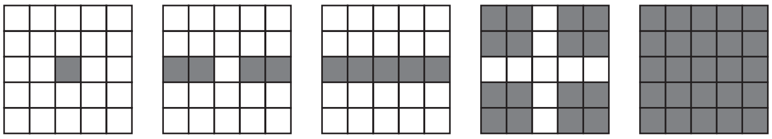
25. Réponse **5.** Soit la case *a* est noire,



et alors il faut aussi noircir…
… soit *b*, soit *c* (2 possibilités),
… et soit *d*, soit *e* (2 possibilités),
et toute la grille est déterminée (avec dans chacun de ces 4 cas, une seule case noire parmi les quatre cases en bas à droite).
Donc, avec *a* noire, 4 grilles sont possibles.
Soit la case *a* n'est pas noire, et alors il faut noircir les cases *b*, *c*, *d*, *e*, et alors toute la grille est déterminée (1 seule grille possible).
Finalement, il y a, $4 + 1$, soit 5 grilles possibles.

26. Réponse **9.**

Si n est solution, $9-n$ l'est aussi (coloriage complémentaire). $n=9$ est solution (colorier toutes les cases), $n=1$ l'est (ne colorier que la case centrale) donc $n=8$ l'est (colorier toutes les cases sauf la case centrale). On obtient $n=3$ en coloriant la ligne centrale, et $n=2$ en coloriant la ligne centrale sauf la case centrale. En coloriant les cases de la colonne et de la ligne centrales, on obtient $n=5$. On conclut que tout entier n entre 1 et 9 est solution.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$ $n = 9$